**1**

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ より，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$ なので，

$$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(\theta)=0$ から $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$ より，$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

(i)　$t=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

すると，$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$，$2\pi+\frac{1}{6}\pi$ より，$\theta=\frac{7}{12}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(ii)　$t=-\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-1$

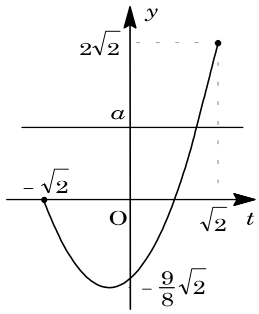
すると，$\theta+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\frac{5}{4}\pi$

(i)(ii)より，$\theta=\frac{7}{12}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{23}{12}\pi$

(3)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)(0\leqq\theta<2\pi)$ より，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき $\theta$ は 1 個，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき $\theta$ は 2 個存在する。

さて，$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=a$ を満たす $t$ の個数は，放物線 $y=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

この放物線を $y=\sqrt{2}\left(t+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\frac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると，$a=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a\leqq2\sqrt{2}$ のとき $t$ は 1 個，$-\frac{9}{8}\sqrt{2}<a\leqq0$ のとき $t$ は 2 個存在する。




よって，$f(\theta)=a$ を満たす $\theta$ がちょうど 2 個となるのは，$a=-\frac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$ のときである。

## [解 説]

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて，論理を注意深く進めていかないと，ミスをしてしまいます。

**2**

問題のページへ

(1) 条件式$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$の両辺を$2^{n+1}$で割ると，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$より，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+4n-17,\ b_{n+1}=b_n+4n-17$$

ただし，$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{36}{2}=18$である。

よって，$n\geqq 2$で，$b_n=18+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-17)=18+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-17(n-1)$

$$=2n^2-19n+35$$

$n=1$をあてはめると，$b_1=18$となり成立する。

したがって，$a_n=b_n2^n=(2n^2-19n+35)2^n$

(2) (1)より，$a_{n+1}=\{2(n+1)^2-19(n+1)+35\}2^{n+1}=2(2n^2-15n+18)2^n$

$$a_{n+1}-a_n=2(2n^2-15n+18)2^n-(2n^2-19n+35)2^n$$
$$=(2n^2-11n+1)2^n$$

$a_n>a_{n+1}$となるのは，$2n^2-11n+1<0$，$n(2n-11)+1<0$

この不等式を満たす自然数は$n=1$，2，3，4，5である。

すると，$1\leqq n\leqq 5$のとき$a_n>a_{n+1}$であり，$n\geqq 6$のとき$a_n<a_{n+1}$となるので，

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$$

よって，$n=6$のとき，$a_n$は最小となる。

(3) $n\geqq 2$で$S_n-S_{n-1}=a_n$より，$a_n>0$のとき$S_{n-1}<S_n$，$a_n=0$のとき$S_{n-1}=S_n$，$a_n<0$のとき$S_{n-1}>S_n$となる。

さて，$a_n>0$とすると，(1)より$2n^2-19n+35>0$となり，

$$(2n-5)(n-7)>0,\ n<\frac{5}{2},\ 7<n$$

よって，$n=2$のとき$a_n>0$，$3\leqq n\leqq 6$のとき$a_n<0$，$n=7$のとき$a_n=0$，$n\geqq 8$のとき$a_n>0$となるので，

$$S_1<S_2>S_3>S_4>S_5>S_6=S_7<S_8<S_9<\cdots\cdots$$

$a_1=36$，$a_2=5\times 2^2=20$，$a_3=-4\times 2^3=-32$より，$S_3=36+20-32=24$となり，$S_3<S_1=36$であるので，$S_n$が最小となるのは$n=6$，7のときである。

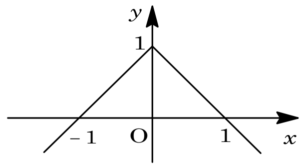
## [解 説]

誘導つきの漸化式の解法と，数列の最大値という有名問題で構成されています。文系に類題が出題されています。

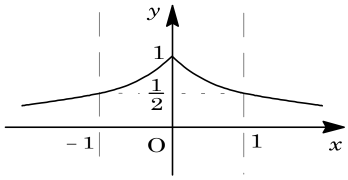
**3**

問題のページへ

(1)　$y=1-|x|$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=1-x$，$x<0$のとき$y=1+x$となるので，グラフは右図のようになる。




また，$y=\dfrac{1}{1+|x|}$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=\dfrac{1}{1+x}$，$x<0$のとき$y=\dfrac{1}{1-x}$となるので，グラフは右下図の実線のようになる。




(2)　$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$ ……①が，$-1\leqq x\leqq 1$において成立する条件は,

(i)　$x=\pm 1$のとき

①の両辺とも 0 となり，任意の$a, b$で成立する。

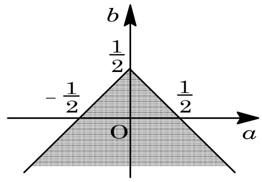
(ii)　$-1<x<1$のとき

$1-x^2>0$より，不等式①は，$ax+b\leqq\dfrac{1-|x|}{1-x^2}$ ………②

さて，$1-x^2=1-|x|^2=(1-|x|)(1+|x|)$と変形すると，不等式②は,

$$ax+b\leqq\frac{1}{1+|x|}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=ax+b$とおくと，③は$-1<x<1$において，$y=f(x)$のグラフが$y=\dfrac{1}{1+|x|}$の下方にあることに等しいので，$a>0$のとき$f(1)=a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a=0$のとき$b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a<0$のとき$f(-1)=-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$となり，$ab$平面上に図示すると，右図の網点部となる。




(i)(ii)より，求める条件は，$a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$

(3)　求める図形の面積を$S$とすると,

$$S=\int_{-1}^{1}\{1-|x|-(ax+b)(1-x^2)\}dx=\int_{-1}^{1}\{1-|x|+ax^3+bx^2-ax-b\}dx$$

$$=2\int_0^1(1-|x|+bx^2-b)dx=2\int_0^1(bx^2-x+1-b)dx$$

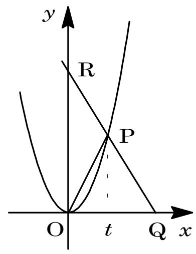
$$=2\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}+1-b\right)=-\frac{4}{3}b+1$$

### [解 説]

$x^2=|x|^2$に気付くことがポイントです。(1)で$y=\dfrac{1}{1+|x|}$のグラフを書かせる設問が，このヒントとなっています。

**4**

問題のページへ




(1) $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ より，$f(0)=e^0+e^0-2=0$

また，$f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$ より，$f'(0)=2e^0-2e^0=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)^2=(1+1)^2=4$$

(2) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とおくと，$\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}$

$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ より $\mathrm{Q}\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2},\ 0\right)$ となり，条件から $\mathrm{R}(0,\ g(t))$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，

$$(0,\ g(t))=(t,\ f(t))+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t,\ -f(t)\right)$$

$$0=t+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t\right)\cdots\cdots\cdots①,\quad g(t)=f(t)-kf(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より $k=\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t}=-\dfrac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{\{f(t)\}^2}$ となり，②に代入して，

$$g(t)=f(t)+\frac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{f(t)}=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

さて，$g(t)=\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)+\sqrt{\left\{\dfrac{t^2}{f(t)}\right\}^2+t^2}$ と変形すると，(1)より $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{f(t)}=\frac{1}{4}$，$f(0)=0$ なので，

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\frac{1}{4}+0+\sqrt{\frac{1}{16}+0}=\frac{1}{2}$$

よって, P が O に近づくとき, R は点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$に近づく。

## [解　説]

一見，難しそうにみえる問題ですが，内容は基本的な計算の積み重ねです。なお，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ は重要な極限値の 1 つです。