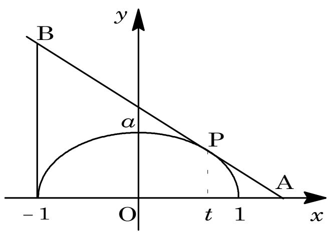
1

問題のページへ

(1)　$y=a\sqrt{1-x^2}$ に対して，$y'=\dfrac{-2ax}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-ax}{\sqrt{1-x^2}}$



接点を $\mathrm{P}(t,\ a\sqrt{1-t^2})$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}(x-t)$$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$を通るので，

$$-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right),\ -a(1-t^2)=-at\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right)$$

よって，$1-t^2=\dfrac{t}{\cos\theta}-t^2$ より，$t=\cos\theta$ となる。

このとき，$a\sqrt{1-t^2}=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a|\sin\theta|=a\sin\theta$ より，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$

接線は，$y-a\sin\theta=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$，$y=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{a}{\sin\theta}$ ………(＊)

(2)　$x=-1$ のとき, (＊)より $y=\dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ となり，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

まず，$\displaystyle\int_{-1}^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)$

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta+\frac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}(\cos\theta+1)-\int_{-1}^{\cos\theta}a\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta(\cos\theta+1)+\frac{a(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\right\}-\frac{1}{2}a(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)\\&=\frac{1}{2}a\left\{\sin\theta+\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}=\frac{1}{2}a\left\{\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}\end{aligned}$$

また，$\displaystyle\int_{\cos\theta}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot1^2-\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}(\theta-\cos\theta\sin\theta)$

$$\begin{aligned}S_2&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)a\sin\theta-\int_{\cos\theta}^{1}a\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=\frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\cos\theta\sin\theta\right)-\frac{1}{2}a(\theta-\cos\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\theta\right)\end{aligned}$$

(3)　点 P が線分 AB の中点のとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$より，

$$2\cos^2\theta+\cos\theta-1=0,\ (2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)=0$$

$\cos\theta>0$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となるので，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ である。

このとき，$S_1=\dfrac{1}{2}a\left(2\sqrt{3}-\dfrac{2}{3}\pi\right)$，$S_2=\dfrac{1}{2}a\left(\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}\right)$より，$S_1=2S_2$ となる。

[解 説]

y 軸方向に $\dfrac{1}{a}$ 倍して，円を楕円に変換して解いたほうが簡単でしたが。

2

問題のページへ

(1)　条件式 $A(x)=A(y)B$ に，右から B^{-1} をかけて，

$$A(y)=A(x)B^{-1}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+3x^2} & 3x\\ x & \sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\sqrt{1+3x^2}-3x & -3\sqrt{1+3x^2}+6x\\ 2x-\sqrt{1+3x^2} & -3x+2\sqrt{1+3x^2}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{1+3y^2}=2\sqrt{1+3x^2}-3x\cdots\cdots①,\quad y=2x-\sqrt{1+3x^2}\cdots\cdots②$$

①より, $x>1$ のとき，$1+3y^2=(2\sqrt{1+3x^2}-3x)^2=21x^2+4-12x\sqrt{1+3x^2}$

$$y^2=7x^2+1-2\sqrt{4x^2(1+3x^2)}=(2x-\sqrt{1+3x^2})^2$$

これより，②が成立する x, y で，①は成り立つ。

$x>1$ のとき，②より，$y=\dfrac{4x^2-(1+3x^2)}{2x+\sqrt{1+3x^2}}=\dfrac{x^2-1}{2x+\sqrt{1+3x^2}}>0\cdots\cdots\cdots③$

$$x-y=x-(2x-\sqrt{1+3x^2})=\sqrt{1+3x^2}-x=\frac{2x^2+1}{\sqrt{1+3x^2}+x}>0$$

以上より, $x>1$ のとき, $0<y<x$ を満たす実数 y が存在する。

(2)条件より，x，$\sqrt{1+3x^2}$ がともに自然数なので，①より $\sqrt{1+3y^2}$ も自然数となる。

さらに，②③より y も自然数となる。

ここで, $x>1$ のとき，$y=x_1$ とおくと，$A(x)=A(x_1)B\ (x>x_1>0)$

同様に，$A(x_1)=A(x_2)B$，$A(x_2)=A(x_3)B$，…，$A(x_k)=A(x_{k+1})B$，…と定義していくと，

$$A(x)=A(x_1)B=A(x_2)B^2=\cdots=A(x_k)B^k=A(x_{k+1})B^{k+1}=\cdots$$

このとき，(1)より $x>x_1>x_2>\cdots>x_k>x_{k+1}>\cdots>0$ となり，しかも x_1，x_2，…，x_k，x_{k+1}，…はすべて自然数なので，ある n に対して，$x_{n-1}=1$ となる。

すなわち，$A(x)=A(x_{n-1})B^{n-1}=A(1)B^{n-1}=BB^{n-1}=B^n$ となる自然数 n が存在する。なお，$x=1$ のときは $A(x)=B$ なので $n=1$ である。

[解 説]

有名な難問がまた出題されました。類題を解いた経験がないと，本問をアタックするのは無理でしょう。なお，記憶にあるところでは，2000 年の岡山大に，見かけは異なるものの同じ内容の問題が出ています。

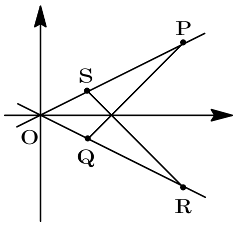
$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より，$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$\bar{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=r(\cos\theta-i\sin\theta),\quad \frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$r>1$ より $r>\dfrac{1}{r}$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2}<-\theta<0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となるので，点 P, Q, R, S は相異なる 4 点である。



(2)　PQ $\perp$ RS より，$\arg\dfrac{z-\dfrac{1}{z}}{\bar{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{z-\dfrac{1}{z}}{\bar{z}-\dfrac{1}{\bar{z}}}=ki\ (k>0)$

$$z-\frac{1}{z}=ki\left(\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)$$

すると，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=ki\left\{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta-i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\right\}$

$$=ki\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta+k\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta=k\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots①,\quad \left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta=k\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots②$$

①②より $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=k^2\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ となり，$r>\dfrac{1}{r}$，$\cos\theta>0, k>0$ より $k=1$

①より，$\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$，$r^2(\cos\theta-\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta$

$\cos\theta-\sin\theta=0$，すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときは成立しないので,

$$r^2=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta},\quad r=\sqrt{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}}$$

さて, $r>1$ より $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}>1$，$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)>(\cos\theta-\sin\theta)^2$

$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta)>0,\quad 2\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)>0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\theta\neq\dfrac{\pi}{4}$ より，θ の動きうる区間は $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

(3)　$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$d=r\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}d=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=0$

[解 説]

誘導に従えば, スムーズに計算が進みます。うまくまとまっている問題です。

4

問題のページへ

(1)　x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x - \log y) \geqq x - y$ を証明する。

(i)　$0 < y < x$ のとき

$f(x) = \log x$ とすると，$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x - \log y}{x - y} = \frac{1}{c_1} \quad (0 < y < c_1 < x)$$

$\dfrac{1}{c_1} > \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x - \log y}{x - y} > \dfrac{1}{x}$，$x(\log x - \log y) > x - y$

(ii)　$0 < x < y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} = \dfrac{1}{c_2} \quad (0 < x < c_2 < y)$

$\dfrac{1}{c_2} < \dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y - \log x}{y - x} < \dfrac{1}{x}$，$x(\log y - \log x) < y - x$

$$x(\log x - \log y) > x - y$$

(iii)　$0 < x = y$ のとき

$\log x - \log y = 0$，$x - y = 0$ より，$x(\log x - \log y) = x - y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x - \log y) \geqq x - y$（等号は $x = y$ のとき成立）

(2)　$1 \leqq i \leqq n$ として, (1)から，$x_i\left(\log x_i - \log\dfrac{1}{n}\right) \geqq x_i - \dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\left(\log x_i - \log\frac{1}{n}\right) \geqq \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \frac{1}{n}\right) \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \log\frac{1}{n} \geqq 1 - \frac{1}{n} \cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \geqq \log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，(*)において $x_i = \dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1 = \cdots = x_n = \dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

[解 説]

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i，y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。