

1

解答解説のページへ

$a$  を正の定数とし、 $xy$  平面上の曲線  $y = a\sqrt{1-x^2}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) を  $C$  とする。  
 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす実数  $\theta$  に対して、点  $A\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$  から曲線  $C$  に接線  $l$  をひき、接点を  $P$  とする。

- (1)  $l$  の方程式および  $P$  の座標を求めよ。
- (2) 直線  $x = -1$  と直線  $l$  および曲線  $C$  で囲まれる部分の面積を  $S_1$  とし、 $x$  軸と直線  $l$  および曲線  $C$  で囲まれる部分の面積を  $S_2$  とする。 $S_1, S_2$  を求めよ。
- (3) 直線  $l$  と直線  $x = -1$  の交点を  $B$  とする。点  $P$  が線分  $AB$  の中点となるならば、 $S_1 = 2S_2$  が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

$x > 0$  に対して、2 次の行列  $A(x)$ ,  $B$  を

$$A(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+3x^2} & 3x \\ x & \sqrt{1+3x^2} \end{pmatrix}, \quad B = A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と定める。

- (1)  $x > 1$  のとき、 $0 < y < x$  であって  $A(x) = A(y)B$  を満たす実数  $y$  が存在することを示せ。
- (2) 行列  $A(x)$  の各成分が自然数であるとする。このとき、 $A(x) = B^n$  となる自然数  $n$  が存在することを示せ。

3

解答解説のページへ

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  を  $r > 1$  かつ  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  を満たす複素数とする。複素数平面において、 $z$ ,  $\frac{1}{z}$ ,  $\bar{z}$ ,  $\frac{1}{\bar{z}}$  を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし、 $\bar{z}$  は  $z$  と共役な複素数を表す。

- (1) 点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。
- (2) 直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき、 $r$  を  $\theta$  の関数として表し、 $\theta$  の動きうる区間  $(\alpha, \beta)$  を求めよ。
- (3) (2)において、原点と点  $\cos\beta + i\sin\beta$  を通る直線を  $l$  とし、点 P と  $l$  の距離を  $d$  とする。 $\theta \rightarrow \beta$  のとき、 $d$  は 0 に収束することを示せ。

4

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) すべての正の数  $x, y$  に対して, 不等式  $x(\log x - \log y) \geq x - y$  が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは  $x = y$  の場合に限ることを示せ。
- (2) 正の数  $x_1, \dots, x_n$  が  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  を満たしているとき, 不等式  $\sum_{i=1}^n x_i \log x_i \geq \log \frac{1}{n}$  が成り立つことを証明せよ。また, 等号が成り立つのは  $x_1 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$  の場合に限ることを示せ。