1

問題のページへ

(1) $A^2=\begin{pmatrix}1&-5\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-5\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}=-4E$，$A^4=(-4E)^2=16E$

(2) (1)より，$A^3+2A^2+4A+8E=(-4E)A+2(-4E)+4E+8E$

$$=-4A-8E+4A+8E=O$$

(3) $B=E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}$とおくと，

$$\left(E-\frac{1}{2}A\right)B=\left(E-\frac{1}{2}A\right)\left\{E+\frac{1}{2}A+\left(\frac{1}{2}A\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}A\right)^{2001}\right\}$$

$$=E-\left(\frac{1}{2}A\right)^{2002}=E-\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}A^{2002}$$

ここで, (1)より，$A^{2002}=(A^4)^{500}A^2=(2^4E)^{500}(-4E)=-2^{2002}E$なので,

$$\left(E-\frac{1}{2}A\right)B=E+\left(\frac{1}{2}\right)^{2002}\cdot 2^{2002}E=2E$$

さて，$E-\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&5\\-1&3\end{pmatrix}$より，$\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-5\\1&1\end{pmatrix}$となり，

$$B=\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}\cdot 2E=2\left(E-\frac{1}{2}A\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-5\\1&1\end{pmatrix}$$

[解 説]

行列の和についての頻出問題です。(1)の結果の利用を考えるのがすべてです。

2

問題のページへ

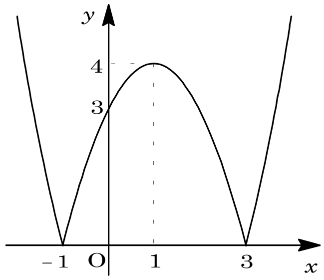
(1) $\int_0^x f(x)\,dx = x^3-3x^2-9x+2\int_x^0 f(x)\,dx = x^3-3x^2-9x-2\int_0^x f(x)\,dx$ より，

$$3\int_0^x f(x)\,dx = x^3-3x^2-9x$$

両辺を微分すると，$3f(x)=3x^2-6x-9$

$$f(x)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$$

ここで，$y=|f(x)|$ のグラフは，$f(x)\geqq 0$ のとき $y=f(x)$，$f(x)<0$ のとき $y=-f(x)$ より，右図のようになる。



(2) $f(x)=4$ の解は，$x^2-2x-3=4$，$x^2-2x-7=0$

$$x=1\pm 2\sqrt{2}$$

$|x|\leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値は, (1)のグラフより,

(i) $0\leqq r<1$ のとき　$x=r$ において最大値をとる。

$$F(r)=|f(r)|=-(r^2-2r-3)=-r^2+2r+3$$

(ii) $1\leqq r<-1+2\sqrt{2}$ のとき　$x=1$ において最大値をとる。

$$F(r)=|f(1)|=4$$

(iii) $-1+2\sqrt{2}\leqq r$ のとき　$x=-r$ において最大値をとる。

$$F(r)=|f(-r)|=(-r)^2-2(-r)-3=r^2+2r-3$$

(3) $\int_0^2 F(r)\,dr=\int_0^1(-r^2+2r+3)\,dr+\int_1^{-1+2\sqrt{2}}4\,dr+\int_{-1+2\sqrt{2}}^2(r^2+2r-3)\,dr$

$$=-\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{2}+3+4(-1+2\sqrt{2}-1)+\int_{-1+2\sqrt{2}}^2\left\{(r+1)^2-4\right\}dr$$

$$=-\frac{13}{3}+8\sqrt{2}+\left[\frac{1}{3}(r+1)^3-4r\right]_{-1+2\sqrt{2}}^2$$

$$=-\frac{13}{3}+8\sqrt{2}+\frac{1}{3}(27-16\sqrt{2})-4(3-2\sqrt{2})=-\frac{22}{3}+\frac{32}{3}\sqrt{2}$$

[解 説]

(3)の計算は複雑ですが，内容は基本レベルです。

3　問題のページへ

(1)　まず, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$ において，$2^i + 2^j = 2^k$ を満たすのは $(i,\ j) = (k-1,\ k-1)$ に限ることを示す。

$i < j$ とすると，$2^i(1+2^{j-i}) = 2^k$，$1+2^{j-i} = 2^{k-i}$ となるが，$j-i \geqq 1$，$k-i \geqq 1$ より左辺は奇数, 右辺は偶数となるので成立しない。よって $i = j = k-1$ である。

さて, $1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq 7$ において，$w = 2^i + 2^j + 2^k$ ……①とする。

$w = 2^8$ のとき，①は $2^i + 2^j + 2^k = 2^8$ となり，$2^k < 2^8$ より $k \leqq 7$ である。また，$2^8 = 2^i + 2^j + 2^k \leqq 3 \cdot 2^k$ より，$\dfrac{2^8}{3} \leqq 2^k$, $7 \leqq k$ なので，$k = 7$ となる。

このとき $2^i + 2^j = 2^8 - 2^7 = 2^7$ となり，$(i,\ j) = (6,\ 6)$ である。

以上より，$(i,\ j,\ k) = (6,\ 6,\ 7)$

$w = 2^6 + 2^4$ のとき，①は $2^i + 2^j + 2^k = 2^6 + 2^4 < 2^7$ となり，$2^k < 2^7$ より $k \leqq 6$ である。また，$2^6 + 2^4 = 2^i + 2^j + 2^k \leqq 3 \cdot 2^k$ より，$\dfrac{2^6 + 2^4}{3} \leqq 2^k$，$5 \leqq k$ なので，$k = 5,\ 6$ となる。

$k = 5$ のとき，$2^i + 2^j = 2^6 + 2^4 - 2^5 = 2^5 + 2^4 < 2^6$ となり，$2^j < 2^6$ より $j \leqq 5$ であり，また $2^5 + 2^4 = 2^i + 2^j \leqq 2 \cdot 2^j$ より，$2^4 + 2^3 \leqq 2^j$，$5 \leqq j$ である。よって，$j = 5$ となり，$2^i = 2^4$ から $i = 4$ となる。

$k = 6$ のとき，$2^i + 2^j = 2^6 + 2^4 - 2^6 = 2^4$ となり，$(i,\ j) = (3,\ 3)$ である。

以上より，$(i,\ j,\ k) = (4,\ 5,\ 5)$，$(3,\ 3,\ 6)$

(2)　まず, 1 つの w の値に対して，$w = 2^r + 2^s$ $(1 \leqq r < s)$ を満たす $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1 \leqq r < s$，$1 \leqq r' < s'$ として，$2^r + 2^s = 2^{r'} + 2^{s'}$ ……②とおく。

$r < r'$ とすると，②の両辺を 2^r で割って $1 + 2^{s-r} = 2^{r'-r} + 2^{s'-r}$ となるが，左辺は奇数，右辺は偶数となるので成立しない。$r > r'$ のときも同様に成立しないので，$r = r'$ となる。

すると，②より $s = s'$ となり，1 つの w の値に対して $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないので，$2^r + 2^s$ の形で表される w の個数は $(r,\ s)$ の個数と一致する。

さて，$w = 2^i + 2^j + 2^k = 2^r + 2^s$　$(1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n,\ r < s)$ ……③として，

(i)　$1 \leqq i < j < k \leqq n$ のとき　③は明らかに不成立。

(ii)　$1 \leqq i = j < k \leqq n$ のとき　③は $w = 2^j + 2^j + 2^k = 2^{j+1} + 2^k$

$j+1 < k$ のときは $j+1 = r$，$k = s$ とおくと，$w = 2^r + 2^s$ $(2 \leqq r < s \leqq n)$

$j+1 = k$ のときは $w = 2^{j+1} + 2^k = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ となり不適。

(iii)　$1 \leqq i < j = k \leqq n$ のとき　③は $w = 2^i + 2^j + 2^j = 2^i + 2^{j+1}$

$i = r$，$j+1 = s$ とおくと，$w = 2^r + 2^s$ $(1 \leqq r < s \leqq n+1)$

(iv) $1 \leqq i = j = k \leqq n$ のとき　③は $w = 2^i + 2^i + 2^i = 2^i + 2^{i+1}$

$i = r$，$i + 1 = s$ とおくと，$w = 2^r + 2^s\ (1 \leqq r < s \leqq n + 1)$

以上より，$w = 2^r + 2^s$ となる $(r,\ s)$ の条件は，$1 \leqq r < s \leqq n + 1$ である。したがって，$(r,\ s)$ の個数すなわち w の値は，全部で ${}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(3)　(2)より，$w = 2^i + 2^j + 2^k$（$1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n$）は，$r < s < t$ として，次の 3 つの場合に分類できる。

(i)　$1 \leqq i < j < k \leqq n$ のとき

$i = r$，$j = s$，$k = t$ とおくと，$w = 2^r + 2^s + 2^t\ (1 \leqq r < s < t \leqq n)$ となる。

さて，1 つの w の値に対して，$w = 2^r + 2^s + 2^t\ (1 \leqq r < s < t)$ を満たす $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1 \leqq r < s < t$，$1 \leqq r' < s' < t'$ として，$2^r + 2^s + 2^t = 2^{r'} + 2^{s'} + 2^{t'}$ ……④とおく。

$r < r'$ とすると，④の両辺を 2^r で割って $1 + 2^{s-r} + 2^{t-r} = 2^{r'-r} + 2^{s'-r} + 2^{t'-r}$ となるが，左辺は奇数，右辺は偶数となるので成立しない。$r > r'$ のときも同様に成立しないので，$r = r'$ となる。

すると，④より $2^s + 2^t = 2^{s'} + 2^{t'}$ となり，(2)より $s = s'$，$t = t'$ である。

よって，1 つの w の値に対して $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないので，$2^r + 2^s + 2^t$ の形で表される w の個数は $(r,\ s,\ t)$ の個数と一致する。

以上より，w の値は ${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 個ある。

(ii)　$1 \leqq i = j < k \leqq n\ (j + 1 < k)$，$1 \leqq i < j = k \leqq n$ または $1 \leqq i = j = k \leqq n$ のとき

(2)より，$w = 2^r + 2^s\ (1 \leqq r < s \leqq n + 1)$ となり，w の値は $\dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(iii) $1 \leqq i = j < k \leqq n\ (j + 1 = k)$ のとき

$w = 2^{k+1}$ となり，$k + 1 = r$ とおくと，$w = 2^r\ (3 \leqq r \leqq n + 1)$

したがって，w の値は $n - 1$ 個ある。

(i)(ii)(iii)より，w の値の個数は，

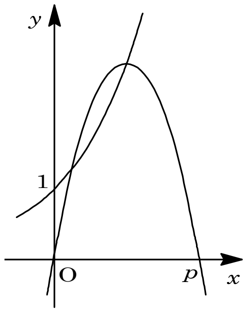
$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}(n+1)n + (n-1) = \frac{1}{6}(n^3 + 11n - 6)$$

[解 説]

金沢大の理系では，例年，難問が 1 題出ますが，本問がそれに相当します。しかし，今年は他の問題との難易差があまりにも大きすぎます。なお，この解は何度も書き直したものです。

4

問題のページへ



(1)　$y=f(x)$ のグラフは 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通るので，

x^2 の係数を a とおくと，

$$f(x)=ax(x-p)$$

条件より，頂点は $\left(\dfrac{p}{2},\ e^{\frac{p}{2}}\right)$ となるので，

$$e^{\frac{p}{2}}=a\cdot\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}\right),\quad a=-\frac{4}{p^2}e^{\frac{p}{2}}$$

(2)　$$V_1=\pi\int_0^p a^2x^2(x-p)^2dx=\pi a^2\int_0^p(x^4-2px^3+p^2x^2)dx$$

$$=\pi a^2\left(\frac{p^5}{5}-2p\cdot\frac{p^4}{4}+p^2\cdot\frac{p^3}{3}\right)=\frac{\pi}{30}a^2p^5$$

$$=\frac{\pi}{30}\cdot\frac{16}{p^4}e^p\cdot p^5=\frac{8\pi}{15}pe^p$$

また，$V_2=\pi\int_0^p e^{2x}dx=\dfrac{\pi}{2}\left[e^{2x}\right]_0^p=\dfrac{\pi}{2}(e^{2p}-1)$

(3)　(2)より，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{8}{15}\pi pe^p}{\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{2p}{e^{2p}-1}e^p$ と変形すると，

$$\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}=\lim_{p\to+0}\frac{8}{15}\cdot\frac{2p}{e^{2p}-1}e^p=\frac{8}{15}$$

[解 説]

前問と比べると難易には雲泥の差があります。普通に計算を進めると正解に到達できます。