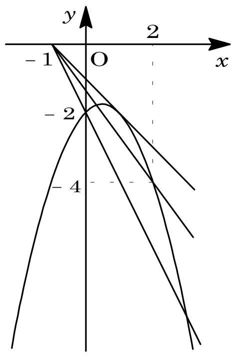
1

問題のページへ

(1)　$x^2+(a-1)x+a+2=0$……(＊)より，$a(x+1)=-x^2+x-2$

$y=a(x+1)$………①，$y=-x^2+x-2$………②



ここで，①は点$(-1,\ 0)$を通る傾き a の直線を表し，また②は$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$と変形すると，頂点$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{4}\right)$の放物線を表す。

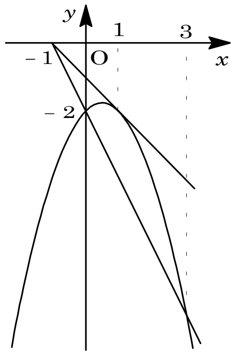
さて，①が点$(0,\ -2)$を通るとき$a=-2$となり，①が点$(2,\ -4)$を通るとき$a=-\dfrac{4}{3}$となる。

さらに，①と②が接するとき，2 次方程式(＊)の判別式$D=(a-1)^2-4(a+2)=0$から，

$a^2-6a-7=0$，$a=7,\ -1$

以上より，(＊)の実数解は，①と②の共有点の x 座標となることを利用すると，$0\leqq x\leqq 2$の範囲に実数解をただ 1 つもつ条件は，

$-2\leqq a<-\dfrac{4}{3}$，$a=-1$



(2)　$a=-1$のとき, (1)より(＊)は重解をもち，その解は,

$x=-\dfrac{a-1}{2}=1$

$a=-2$のとき, (＊)は$x^2-3x=0$から，$x=0,\ 3$

したがって，$-2\leqq a\leqq -1$のとき，2 次方程式(＊)の実数解のとりうる値の範囲は, $0\leqq x\leqq 3$となる。

[解 説]

与えられた 2 次方程式(＊)が，パラメータ a についての 1 次式なので，直線と放物線の共有点として解をとらえました。

2

問題のページへ

(1)　${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}={}_n\mathrm{C}_r-{}_{n-1}\mathrm{C}_r$ となるので, $n\geqq4$ のとき,

$$\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_2\mathrm{C}_2+\sum_{k=4}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_3+\sum_{k=4}^{n}({}_k\mathrm{C}_3-{}_{k-1}\mathrm{C}_3)={}_n\mathrm{C}_3$$

また，$n=3$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=3}^{3}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_2\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_3$ より成り立つ。

以上より, $n\geqq3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_n\mathrm{C}_3$

(2)k 個の球を 1 列に並べ, その球の間の $k-1$ か所から 2 か所選んで仕切りを入れる。左側の仕切りの左側にある球の個数を x, 2 つの仕切りの間にある球の個数を y, 右側の仕切りの右側にある球の個数を z とすると,

$x+y+z=k$ ($x\geqq1$, $y\geqq1$, $z\geqq1$) ………①

ここで, 仕切りの入れ方 1 通りに対して, ①を満たす整数の組(x, y, z)は 1 通り決まり, その個数は,

$${}_{k-1}\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

(3)　整数 k を $0\leqq k\leqq m$ とし，$x+y+z=k$ ($x\geqq0$, $y\geqq0$, $z\geqq0$) ……②を満たす整数の組(x, y, z)に対して，$a=x+1$, $b=y+1$, $c=z+1$とおくと,

$a+b+c=k+3$ ($a\geqq1$, $b\geqq1$, $c\geqq1$) ………③

③を満たす整数の組(a, b, c)は, (2)より ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので, ②を満たす整数の組(x, y, z)の個数は ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ である。

すると，$x+y+z\leqq m$ ($x\geqq0$, $y\geqq0$, $z\geqq0$) を満たす整数の組(x, y, z)の個数は, (1)を用いて,

$$\sum_{k=0}^{m}{}_{k+2}\mathrm{C}_2=\sum_{k=3}^{m+3}{}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_{m+3}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(m+3)(m+2)(m+1)$$

[解 説]

(3)の条件を満たす四面体の内部または面上の格子点の個数を求めることが本問のねらいです。(1)と(2)がそれを導くためのうまい誘導となっています。

3

問題のページへ

(1)　$f(t)=3^k(3^t+3^{-t})$，$g(t)=3^k(3^t-3^{-t})$，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ より，

$$3^k(3^{2t}+3^{-2t})=3^{2k}(3^{2t}+2+3^{-2t})+3^{2k}(3^{2t}-2+3^{-2t})$$

$$3^{2t}+3^{-2t}=2\cdot 3^k(3^{2t}+3^{-2t})，(2\cdot 3^k-1)(3^{2t}+3^{-2t})=0$$

$3^{2t}+3^{-2t}>0$ なので，$3^k=\dfrac{1}{2}$，$k=\log_3\dfrac{1}{2}=-\log_3 2$

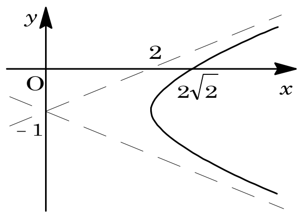
また，$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2=4\cdot 3^{2k}=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$ ………①

(2)　条件より，$x=2f(t)$，$y=g(t)-1$ なので，$f(t)=\dfrac{x}{2}$，$g(t)=y+1$

①に代入して，$\dfrac{x^2}{4}-(y+1)^2=1$ ………②

ここで，$x=2f(t)=2\cdot\dfrac{1}{2}(3^t+3^{-t})\geqq 2$ となり，

$y=g(t)-1=\dfrac{1}{2}(3^t-3^{-t})-1$ から，すべての実数値をとりうるので，曲線 C は双曲線の右側の枝である。



なお，漸近線は，$y+1=\pm\dfrac{x}{2}$，$y=\pm\dfrac{x}{2}-1$

x 軸との交点は，$x\geqq 1$ より $\dfrac{x^2}{4}=2$，$x=2\sqrt{2}$

(3)　接点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，②より $\dfrac{s^2}{4}-(t+1)^2=1$ ……③となり，接線は，

$$\frac{sx}{4}-(t+1)(y+1)=1$$

原点を通ることより，$-(t+1)=1$，$t=-2$ ………④

③④より，$s^2=8$，$s=2\sqrt{2}$ となり，P の座標は $(2\sqrt{2},\ -2)$ である。

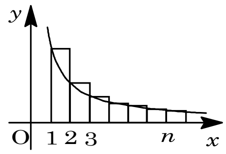
[解　説]

(2)の双曲線の式を求めるのに，(1)の①がずいぶん役に立ちます。もっとも最初は，うっかりして，これに気付かずに求めようとしましたが。

4

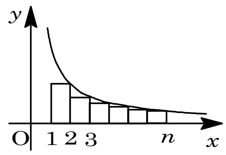
問題のページへ

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ とすると，$f(x)$ は減少関数より，



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$
$$=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) (1)と同様にして，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\displaystyle\int_1^n f(x)\,dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\log(n+1)<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{\log n}+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて $n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\log(n+1)}{\log n}-1=\dfrac{\log(n+1)-\log n}{\log n}=\dfrac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\to 0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)=1$ となるので，③より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3) まず，$\displaystyle\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\ \cdots\cdots\cdots④$

$k\leqq x\leqq k+1$ において，$\dfrac{|\sin\pi x|}{k+1}\leqq\left|\dfrac{\sin\pi x}{x}\right|\leqq\dfrac{|\sin\pi x|}{k}$ より，

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\leqq\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{1}{k}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$y=x-k$ とおくと，

$$\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx=\int_0^1|\sin\pi(y+k)|\,dy=\int_0^1|\sin\pi y|\,dy=\int_0^1\sin\pi y\,dy$$
$$=-\frac{1}{\pi}\Big[\cos\pi y\Big]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において，$k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると，

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

④より，$\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\leqq\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-1+\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$

[解 説]

金沢大・理系の入試問題には，毎年，よく練られた難問が 1 題出題されますが，今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限値をどのように使うかということを考えていると，謎解きの楽しみが味わえます。