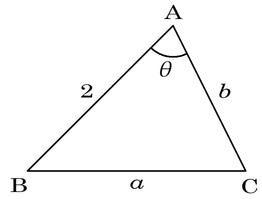
1

問題のページへ

$BC = a$，$CA = b$，$\angle BAC = \theta$ とおくと，

条件より，$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot b\sin\theta = 1$，$b\sin\theta = 1$ ………①



余弦定理より，$a^2 = 4 + b^2 - 4b\cos\theta$ ………②

ここで，$l = a^2 + (2\sqrt{3} - 1)b^2$ とおくと，①②より，

$$l = 4 + b^2 - 4b\cos\theta + (2\sqrt{3} - 1)b^2$$
$$= 2\sqrt{3}b^2 - 4b\cos\theta + 4$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\theta} - \frac{4\cos\theta}{\sin\theta} + 4$$
$$l' = 2\sqrt{3}\cdot\frac{-2\cos\theta}{\sin^3\theta} - 4\cdot\frac{-1}{\sin^2\theta}$$
$$= \frac{-4\sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta}{\sin^3\theta}$$
$$= \frac{8}{\sin^3\theta}\cdot\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
l'		$-$	0	$+$	
l		↘		↗	

増減表より, l が最小になるのは，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のときである。

[解 説]

文系に誘導つきで同じ問題が出ています。理系では誘導がありませんので，異なった解法となりました。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　東方向に 1 区画進むのを→，北方向に 1 区画進むのを↑で表すと，S 地点から G 地点に至る 1 つの経路は，→を 6 個，↑を 4 個を 1 列に並べる順列に対応するので，求める経路の数は，

$$\frac{10!}{6!4!}=210\text{通り}$$

(2)　(1)と同様に考えて，S 地点から A 地点へは 2 通り，A 地点から B 地点へは 1 通り，B 地点から G 地点へは $\frac{7!}{4!3!}=35$ 通りより，求める経路の数は，

$$2\times1\times35=70\text{通り}$$

(3)　(2)より a 点を通る経路の数は，70 通りとなる。

また，b 点を通る経路の数は，$\frac{6!}{4!2!}\times1\times\frac{3!}{2!1!}=45$ 通り，a 点と b 点をともに通る経路の数は，$2\times1\times\frac{3!}{2!1!}\times1\times\frac{3!}{2!1!}=18$ 通りとなる。

よって，a 点，b 点を少なくとも 1 回通る経路の数は，$70+45-18=97$ 通りである。

(1)より，a 点と b 点をともに通らない経路の数は，$210-97=113$ 通りとなる。

［解 説］

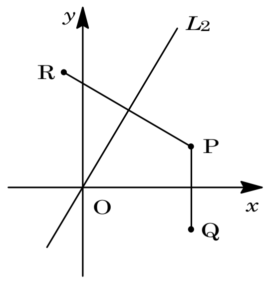
有名な経路問題です。複雑な仕掛けはまったくありませんでした。文系にほとんど同じ問題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　L_2 の法線ベクトルを $\vec{n}=(-\sqrt{3},\ 1)$ とすることができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}=(a-\sqrt{3}k,\ b+k)\cdots\cdots\cdots①$$



PR の中点が直線 $L_2: y=\sqrt{3}x$ 上にあるので，

$$\frac{b+(b+k)}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{a+(a-\sqrt{3}k)}{2}$$

$$2b+k=2\sqrt{3}a-3k,\quad k=\frac{1}{2}(\sqrt{3}a-b)$$

①に代入し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$

よって，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$

(2)　$\mathrm{Q}(a,\ -b)$ で，条件より $\mathrm{QR}=2$ なので，

$$\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+b\right)^2=4$$

$$\frac{3}{4}\left\{(-\sqrt{3}a+b)^2+(a+\sqrt{3}b)^2\right\}=4$$

まとめると，$a^2+b^2=\frac{4}{3}$ より，点 P は円 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$ を描く。

(3)　△PQR の面積を S として，$S=\frac{1}{2}\cdot|2b|\cdot\left|-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b-a\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|b(-\sqrt{3}a+b)\right|$

(2)より，$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくことができるので，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\left(-2\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\left|\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1-(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1-2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

よって，$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき，S は最大値 $\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ をとる。

このとき，n を整数として，$2\theta+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$，$\theta=n\pi+\frac{2}{3}\pi$

よって，$(a,\ b)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$

$$(a,\ b)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{3}\pi,\ \sin\frac{5}{3}\pi\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right)$$

[解 説]

問題の流れに乗っていけば，(3)の結論まで到達できます。特別な技法などは必要ありません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x+1)=f(x)$ より，帰納的に $f(x+n)=f(x)$ となる。

$x-n=t$ とおくと $dx=dt$ で，$x=n\to x=n+1$ のとき $t=0\to t=1$ である。

$$\int_n^{n+1} e^{ax}f(x)dx=\int_0^1 e^{a(t+n)}f(t+n)dt=e^{an}\int_0^1 e^{at}f(t)dt=pe^{an}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{ak}$ となるので，

(i)　$a\neq 0$ のとき

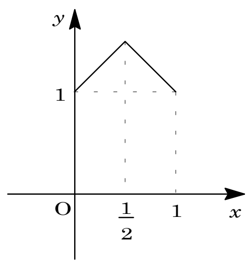
$$\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{ak}=p\cdot\frac{1-e^{an}}{1-e^a}$$

(ii)　$a=0$ のとき

$$\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{0}=pn$$

(3)　$0\leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}=x+1$

また，$\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{2}=-x+2$



$$\begin{aligned}
p&=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)e^{-x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(-x+2)e^{-x}dx\\
&=-\Big[(x+1)e^{-x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx-\Big[(-x+2)e^{-x}\Big]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}dx\\
&=-\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}-1\right)-\left(e^{-\frac{1}{2}}-1\right)-\left(e^{-1}-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&=2-2e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)より，$\displaystyle\int_0^n e^{-x}f(x)dx=\left(2-2e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}f(x)dx=\left(2-2e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\frac{e}{e-1}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}$$

[解 説]

前問と同じく，正確な計算力と問題文の読解力があれば完答できます。ただ，(2)では場合分けをするという注意力も必要です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ より，

$$f'(x)=-\frac{-pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2}-a=\frac{pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2}-a$$

ここで，$e^{-x}=t$ とおき, $t>0$ で $g(t)=\dfrac{pt^p}{(1+t^p)^2}$ とすると，

$$g'(t)=\frac{p^2t^{p-1}(1+t^p)^2-pt^p\cdot 2(1+t^p)\cdot pt^{p-1}}{(1+t^p)^4}$$

$$=-\frac{p^2t^{p-1}(t^p-1)}{(1+t^p)^3}$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$g'(t)$		＋	0	－	
$g(t)$	0	↗	$\dfrac{p}{4}$	↘	0

増減表より，$0<g(t)\leqq\dfrac{p}{4}$

すると，$f(x)$ が極値をもつ条件，

すなわち $f'(x)$ が符号変化する条件は，$f'(x)=g(e^{-x})-a$ より $0<a<\dfrac{p}{4}$ となる。

[解 説]

意外なくらいあっさりと結論が導けました。p の値での場合分けが必要だろうと予測しながら解いたのですが。