1

解答解説のページへ

複素数平面上における図形C_1，C_2，…，C_n，…は次の条件(A)と(B)をみたすとする。ただし，iは虚数単位とする。

(A)　C_1は原点Oを中心とする半径2の円である。

(B)　自然数 n に対して，z がC_n上を動くとき$2w=z+1+i$で定まる w の描く図形がC_{n+1}である。

(1)　すべての自然数 n に対して，C_nは円であることを示し，その中心を表す複素数α_nと半径r_nを求めよ。

(2)　C_n上の点と O との距離の最小値をd_nとする。このとき，d_nを求めよ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標空間において，3 点 A$(4,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ -4,\ 1)$，C$(2,\ 2,\ -1)$ を通る平面を α とおく。また，球面 S は半径が 9 で，S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし，S の中心 P の z 座標は正とする。

(1)　線分 AP の長さを求めよ。

(2)　P の座標を求めよ。

(3)　S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底を表す。

(1) k を実数の定数とし，$f(x)=xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ を用いてもよい。

(2) $xye^{-(x+y)}=c$ をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。

(3) $xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x, y を考えるとき，y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，$K_n = |1-a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$ とおく。また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

(1)　$K_3 = 5$ となる確率を求めよ。

(2)　q_n を求めよ。また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ。

(3)　n を 4 以上の自然数とする。$L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき，L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。$L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

a, b を $a^2+b^2<1$ をみたす正の実数とする。また，座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし，C の内部にある 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ を考える。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を考え，P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1) $f(\theta)=ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta$ とおく。方程式 $f(\theta)=0$ の解が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(2) D の座標を b, θ を用いて表せ。

(3) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，3 点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また，このような θ はただ 1 つであることを示せ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　すべての自然数 n に対して，C_n は円であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(ii)　$n=k$ のとき　C_k は，中心 α_k で半径 r_k の円であると仮定すると，

$$|z-\alpha_k|=r_k$$

ここで，$2w=z+1+i$ から $z=2w-1-i$ となり，$|2w-1-i-\alpha_k|=r_k$ より，

$$\left|w-\frac{1+i+\alpha_k}{2}\right|=\frac{r_k}{2}$$

すると，C_{k+1} は，中心 $\dfrac{1+i+\alpha_k}{2}$ で半径 $\dfrac{r_k}{2}$ の円である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，C_n は円である。

さて，C_n の中心 α_n に対して，$\alpha_{n+1}=\dfrac{1+i+\alpha_n}{2}=\dfrac{1}{2}\alpha_n+\dfrac{1+i}{2}$ となり，

$$\alpha_{n+1}-(1+i)=\frac{1}{2}\{\alpha_n-(1+i)\}$$

$\alpha_1=0$ より，$\alpha_n-(1+i)=\{\alpha_1-(1+i)\}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=-(1+i)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので，

$$\alpha_n=(1+i)\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

また，C_n の半径 r_n に対して，$r_{n+1}=\dfrac{r_n}{2}$ となり，$r_1=2$ から，

$$r_n=r_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

(2)　$|\alpha_n|=|1+i|\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\sqrt{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ となり，

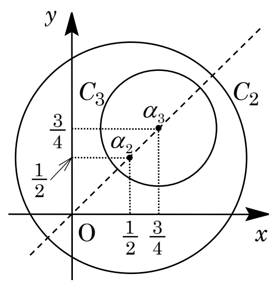
$$|\alpha_n|-r_n=\sqrt{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\sqrt{2}-(\sqrt{2}+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

さて，$|\alpha_n|-r_n<0$ とすると，$\sqrt{2}<(\sqrt{2}+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ から $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，

$$2^{n-1}<\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$$

これより，$n=1,\ 2$ のとき $|\alpha_n|<r_n$ となり，$n\geqq 3$ のとき $|\alpha_n|\geqq r_n$ である。

すると，C_n 上の点と O との距離の最小値 d_n は，



(a)　$n=1$ のとき　$|\alpha_1|=0$，$r_1=2$ から，$d_1=r_1=2$

(b)　$n=2$ のとき　$|\alpha_2|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$r_2=1$ から，

$$d_2=r_2-|\alpha_2|=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(c)　$n\geqq 3$ のとき

$$d_n=|\alpha_n|-r_n=\sqrt{2}-(\sqrt{2}+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

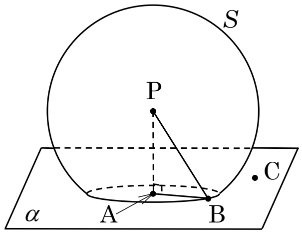
また，(c)から，$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{2} - (\sqrt{2}+2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} = \sqrt{2}$ である。

［解 説］

複素数平面上の円の列に関する問題です。与えられた条件が，(1)の証明法についての誘導になっています。また，(2)は場合分けに要注意です。

2

問題のページへ



(1)　A$(4,\ 2,\ 1)$，B$(1,\ -4,\ 1)$，C$(2,\ 2,\ -1)$ を通る平面 α と，中心 P で半径 9 の球面 S の交わりは，A を中心とし B を通る円であることより，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{9^2-(3^2+6^2)}=6$$

(2)　P$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ $(z_0>0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x_0-4,\ y_0-2,\ z_0-1)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-3,\ -6,\ 0)=-3(1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-2,\ 0,\ -2)=-2(1,\ 0,\ 1)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，

$$(x_0-4)+2(y_0-2)=0\ \cdots\cdots\cdots ①,\ (x_0-4)+(z_0-1)=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$x_0-4=-(z_0-1)\ \cdots\cdots ③$，$y_0-2=-\dfrac{1}{2}(x_0-4)=\dfrac{1}{2}(z_0-4)\ \cdots\cdots ④$

(1)から $\mathrm{AP}^2=36$ なので，$(x_0-4)^2+(y_0-2)^2+(z_0-1)^2=36$ となり，③④から，

$$(z_0-1)^2+\frac{1}{4}(z_0-1)^2+(z_0-1)^2=36,\ (z_0-1)^2=16$$

$z_0>0$ から $z_0-1>-1$ となり，$z_0-1=4$ すなわち $z_0=5$，そして③④より，$x_0-4=-4$ から $x_0=0$，$y_0-2=\dfrac{1}{2}\cdot 4$ から $y_0=4$ なので，P$(0,\ 4,\ 5)$ である。

(3)　(2)から，$S: x^2+(y-4)^2+(z-5)^2=81\ \cdots\cdots ⑤$となり，また t を実数として，

$$\text{直線OC}: (x,\ y,\ z)=t(2,\ 2,\ -1)\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$(2t)^2+(2t-4)^2+(-t-5)^2=81$ となり，$9t^2-6t-40=0$

この解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{41}}{3}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{41}}{3}$ となり，S と直線 OC の 2 つの交点は，Q$(2\alpha,\ 2\alpha,\ -\alpha)$，R$(2\beta,\ 2\beta,\ -\beta)$ と表され，

$$\mathrm{QR}=|\beta-\alpha|\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=\frac{2\sqrt{41}}{3}\cdot 3=2\sqrt{41}$$

［解　説］

球面と平面および球面と直線の関係を題材にした空間図形の標準的な問題です。

3

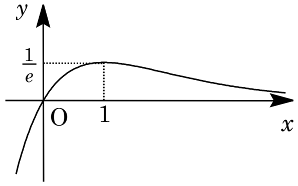
問題のページへ

(1)　$f(x)=xe^{-x}$ に対して，

$$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(0)=0$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ に注意すると，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



さて，k を実数の定数として，方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の異なる共有点の個数に対応するので，

$$k>\frac{1}{e}\text{ のとき 0 個，}\ k=\frac{1}{e}\text{ または } k\leqq 0\text{ のとき 1 個，}\ 0<k<\frac{1}{e}\text{ のとき 2 個}$$

(2)　$xye^{-(x+y)}=c$ ……①をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するのは，①から，

$$xe^{-x}\cdot ye^{-y}=c,\ \ f(x)f(y)=c\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$y>0$ から $f(y)>0$ となり，②より $f(x)=\dfrac{c}{f(y)}$ ………③

まず，$x>0$ から $f(x)>0$ となり，③をみたす $x>0$ がただ 1 つ存在する条件は，

$$\frac{c}{f(y)}=\frac{1}{e},\ \ f(y)=ec\ \cdots\cdots\cdots④$$

そして，④をみたす $y>0$ がただ 1 つ存在する条件は，$ec=\dfrac{1}{e}\left(c=\dfrac{1}{e^2}\right)$ となる。

よって，①をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在する c の値は $c=\dfrac{1}{e^2}$ である。

(3)　$xye^{-(x+y)}=\dfrac{3}{e^4}$ すなわち $f(x)f(y)=\dfrac{3}{e^4}$ ……⑤をみたす正の実数 x, y を考える。

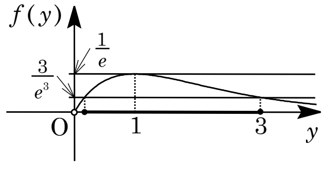
まず，$y>0$ から $0<f(y)\leqq\dfrac{1}{e}$ において，⑤より $f(y)=\dfrac{3}{e^4f(x)}$ となる。

すると，$x>0$ から $0<f(x)\leqq\dfrac{1}{e}$ であるので，$f(y)=\dfrac{3}{e^4f(x)}\geqq\dfrac{3}{e^4}\cdot e=\dfrac{3}{e^3}$

したがって，$f(y)$ のとりうる値の範囲は，$0<f(y)\leqq\dfrac{1}{e}$ かつ $f(y)\geqq\dfrac{3}{e^3}$ となり，$\dfrac{3}{e^3}<\dfrac{1}{e}$ に注意すると，

$$\frac{3}{e^3}\leqq f(y)\leqq\frac{1}{e}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$f(y)=\dfrac{3}{e^3}$ すなわち $\dfrac{y}{e^y}=\dfrac{3}{e^3}$ の解の 1 つは $y=3$ となるので，⑥をみたす y のとりうる値の最大値は，右図から $y=3$ である。



このとき，⑤から $f(x)=\dfrac{3}{e^4}\cdot\dfrac{e^3}{3}=\dfrac{1}{e}$ となり，$x=1$ である。

［解 説］

微分と増減のやや難な問題です。(1)はよく見かける基本題です。(2)と(3)の 2 変数の方程式は，(1)の結果を誘導とみなしてアプローチするものです。

4

問題のページへ

(1)　$K_3=|1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6|$ に対し，$1\leqq a_1\leqq 6$，$1\leqq a_3\leqq 6$ より，

$$K_3=-(1-a_1)-(a_3-6)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$$
$$=5+(a_1-a_3)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|$$

三角不等式より，$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|\geqq|(a_1-a_2)+(a_2-a_3)|=|a_1-a_3|$………①

$$K_3\geqq 5+(a_1-a_3)+|a_1-a_3|\text{………②}$$

①において等号が成立するのは，a_1-a_2 と a_2-a_3 の符号が等しい，すなわち $a_1\geqq a_2\geqq a_3$ または $a_1\leqq a_2\leqq a_3$ のときである。

(a)　$a_1-a_3>0$ $(a_1>a_3)$ のとき　②より，$K_3\geqq 5+2(a_1-a_3)>5$

(b)　$a_1-a_3\leqq 0$ $(a_1\leqq a_3)$ のとき　②より，$K_3\geqq 5+(a_1-a_3)-(a_1-a_3)=5$

(a)(b)より，$K_3=5$ となるのは,

$a_1\leqq a_3$　かつ（$a_1\geqq a_2\geqq a_3$ または $a_1\leqq a_2\leqq a_3$）

これより，$1\leqq a_1\leqq a_2\leqq a_3\leqq 6$ のときであり，これをみたす場合の数は,

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$（通り）

よって，$K_3=5$ となる確率は，$\dfrac{56}{6^3}=\dfrac{7}{27}$ である。

(2)　$K_n=|1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6|$ に対し，(1)と同様にすると,

$$K_n=-(1-a_1)-(a_n-6)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|$$
$$=5+(a_1-a_n)+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|\text{………③}$$

さて，$n\geqq 2$ として，実数 x_1，x_2，…，x_n に対し，次の不等式が成り立つことを，数学的帰納法により示す。

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_n|\text{………}(*)$$

ただし，等号は x_1，x_2，…，x_n の符号が同じときに成立する。

(i)　$n=2$ のとき

三角不等式より，$|x_1|+|x_2|\geqq|x_1+x_2|$（等号成立は x_1，x_2 の符号が同じとき）

(ii)　$n=k$ のとき

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k|$（等号成立は x_1，x_2，…，x_k の符号が同じとき）が成り立つと仮定すると,

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|$$

三角不等式より，$|x_1+x_2+\cdots+x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|$ となり,

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_k|+|x_{k+1}|\geqq|x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}|$$

等号成立は，x_1，x_2，…，x_k の符号が同じで，しかも $x_1+x_2+\cdots+x_k$ と x_{k+1} の符号が同じとき，すなわち x_1，x_2，…，x_k，x_{k+1} の符号が同じときである。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ で，不等式$(*)$が成り立つ。

ただし，等号はx_1，x_2，…，x_nの符号が同じときに成立する。

そこで，$x_1=a_1-a_2$，$x_2=a_2-a_3$，…，$x_{n-1}=a_{n-1}-a_n$とおくと，

$$|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n| \geqq |(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)|=|a_1-a_n| \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$K_n \geqq 5+(a_1-a_n)+|a_1-a_n| \cdots\cdots\cdots ⑤$

④において等号が成立するのは，a_1-a_2，…，$a_{n-1}-a_n$の符号が等しい，すなわち$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{n-1} \geqq a_n$または$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$のときである。

(a)　$a_1-a_n>0\ (a_1>a_n)$のとき　⑤より，$K_n \geqq 5+2(a_1-a_n)>5$

(b)　$a_1-a_n \leqq 0\ (a_1 \leqq a_n)$のとき　⑤より，$K_n \geqq 5+(a_1-a_n)-(a_1-a_n)=5$

(a)(b)より，$K_n \geqq 5$となり，等号が成り立つのは，

$$a_1 \leqq a_n \text{　かつ（} a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{n-1} \geqq a_n \text{ または } a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \text{）}$$

これより，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$のときである。

以上より，K_nのとりうる値の最小値q_nは$q_n=5$であり，$K_n=q_n$となるための必要十分条件は，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$である。

(3)　$n \geqq 4$のとき，$L_n=K_n+|a_4-4| \geqq q_n+|a_4-4|=5+|a_4-4| \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥において等号が成り立つのは，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$のときである。

そして，$5+|a_4-4|$は$a_4=4$のとき最小値 5 をとるので，⑥から，L_nのとりうる値の最小値r_nは$r_n=5$である。$L_n=r_n$となるのは，

$$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6 \text{　かつ　} a_4=4$$

すなわち，$1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4=4 \leqq a_5 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n \leqq 6$のときである。

これをみたす場合の数は，$n \geqq 5$で，

$$ {}_4\mathrm{H}_3 \times {}_3\mathrm{H}_{n-4} = {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_{n-4} = {}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{n-2}\mathrm{C}_2 = 20 \times \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$
$$=10(n-2)(n-3)$$

$n=4$のとき，この値は20となり成立している。

よって，$L_n=r_n$となる確率p_nは，$p_n=\dfrac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$である。

［解 説］

確率と三角不等式が融合した難度の高い問題です。また，(2)の一般化した三角不等式(＊)については，簡単に証明しておきました。記述不要だったかもしれませんが。

5

問題のページへ

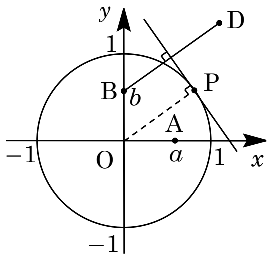
(1)　$a>0$，$b>0$，$a^2+b^2<1$ のとき，$0<a<1$，$0<b<1$ となる。

さて，$f(\theta)=ab\cos 2\theta+a\sin\theta-b\cos\theta$ に対して，

$$f(0)=ab-b=(a-1)b<0,\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-ab+a=a(-b+1)>0$$

よって，方程式 $f(\theta)=0$ の解は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する。

(2)　原点を中心とする半径 1 の円 C の内部にある 2 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$ を考える。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき C 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における C の接線の方程式は,



$$x\cos\theta+y\sin\theta=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

この接線①に関して B と対称な点を $\mathrm{D}(u,\ v)$ とおくと,

$\mathrm{BD}/\!/\mathrm{OP}$ より t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり,

$$(u,\ v)=(0,\ b)+t(\cos\theta,\ \sin\theta)=(t\cos\theta,\ b+t\sin\theta)$$

そして，線分 BD の中点 $\left(\frac{t\cos\theta}{2},\ \frac{2b+t\sin\theta}{2}\right)$ が，①上にあることより,

$$\frac{t}{2}\cos^2\theta+\frac{2b+t\sin\theta}{2}\sin\theta=1,\quad t\cos^2\theta+2b\sin\theta+t\sin^2\theta=2$$

すると，$t=2-2b\sin\theta$ から，$u=2\cos\theta-2b\sin\theta\cos\theta=2\cos\theta-b\sin 2\theta$

$$v=b+2\sin\theta-2b\sin^2\theta=2\sin\theta+b\cos 2\theta$$

よって，$\mathrm{D}(2\cos\theta-b\sin 2\theta,\ 2\sin\theta+b\cos 2\theta)$ となる。

(3)　3 点 A, P, D が同一直線上にある条件は，s を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ から,

$$(2\cos\theta-b\sin 2\theta-a,\ 2\sin\theta+b\cos 2\theta)=s(\cos\theta-a,\ \sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

これより，$(2\cos\theta-b\sin 2\theta-a)\sin\theta-(2\sin\theta+b\cos 2\theta)(\cos\theta-a)=0$ となり,

$$-b\sin 2\theta\sin\theta-b\cos 2\theta\cos\theta+a\sin\theta+ab\cos 2\theta=0$$

加法定理から $-b\cos\theta+a\sin\theta+ab\cos 2\theta=0$ となり，$f(\theta)=0$ である。

すると，(1)から，②をみたす θ は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する。

さらに，$f'(\theta)=-2ab\sin 2\theta+a\cos\theta+b\sin\theta$ なり，$\sin\theta>0$，$\cos\theta>0$ から,

$$a\cos\theta+b\sin\theta\geqq 2\sqrt{a\cos\theta\cdot b\sin\theta}=\sqrt{2ab\sin 2\theta}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$a^2+b^2\geqq 2ab$ から $0<2ab<1$ となり，$0<2\theta<\pi$ から $0<\sin 2\theta\leqq 1$ であるので，$0<2ab\sin 2\theta<1$ となる。

すると，$\sqrt{2ab\sin 2\theta}>2ab\sin 2\theta\ \cdots\cdots④$ となり，③④から,

$$a\cos\theta+b\sin\theta>2ab\sin 2\theta$$

すなわち $f'(\theta)>0$ となり，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において $f(\theta)$ は単調に増加する。

よって，②をみたす θ はただ 1 つである。

［解 説］

微分の応用に関する問題です。(2)まではよく見かける対称移動の問題ですが，(3)で $f(\theta)$ がそのまま出現したのは意外でした。そして，最後の詰めの部分には，予想以上に時間がかかりました。