

1

問題のページへ

- (1)  $n^2 - n - \frac{5}{4} < 0 \dots\dots$  より,  $\frac{1-\sqrt{6}}{2} < n < \frac{1+\sqrt{6}}{2}$  となり,  $2 < \sqrt{6} < 3$  から,  

$$-1 < \frac{1-\sqrt{6}}{2} < -\frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2} < \frac{1+\sqrt{6}}{2} < 2$$
よって, を満たす整数  $n$  は,  $n = 0, 1$
- (2)  $[x] = n$  とおくと,  $[x]^2 - [x] - \frac{5}{4} < 0$  は と一致するので, (1)より,  $[x] = 0, 1$   
よって,  $0 < x < 2$
- (3)  $0 < x < 2$  のとき,  $x^2 - [x] - \frac{5}{4} = 0 \dots\dots$  に対して,  
(i)  $[x] = 0$  ( $0 < x < 1$ ) のとき  
より,  $x^2 - \frac{5}{4} = 0$  となるが,  $0 < x < 1$  から解なし。  
(ii)  $[x] = 1$  ( $1 < x < 2$ ) のとき  
より,  $x^2 - \frac{9}{4} = 0$  となり,  $1 < x < 2$  から,  $x = \frac{3}{2}$   
(i)(ii)より,  $x = \frac{3}{2}$

## [ 解 説 ]

ガウス記号を題材としていますが, 内容は与えられた定義の理解を問うものです。  
文系に数値だけを変更した類題があります。

2

問題のページへ

(1)  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とするとき,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して,

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O \dots\dots\dots$$

すると,  $a+d = ad-bc = 0$  のとき, より,  $A^2 = O$  となる。

(2) ある自然数  $n$  に対して  $A^n = O$  のとき,  $ad-bc \neq 0$  とすると,  $A^{-1}$  が存在し,

$$A^{-1}A^n = A^{-1}O, A^{n-1} = O$$

同様にして,  $A^{-1}$  を左からかけていくと,  $E = O$  となり矛盾が生じる。

よって,  $A^{-1}$  は存在しないことから,  $ad-bc = 0$  である。

(3) ある自然数  $n$  に対して  $A^n = O$  のとき, (2) より  $ad-bc = 0$  なので, から,

$$A^2 = (a+d)A \dots\dots\dots$$

$$\text{より, 帰納的に, } A^n = (a+d)^{n-1}A$$

すると,  $A^n = O$  から,  $a+d = 0$  または  $A = O$  となり, このいずれの場合も, より,  $A^2 = O$  である。

### [ 解 説 ]

べき零行列に関する有名な頻出問題です。誘導のない出題も, しばしば見かけます。

3

問題のページへ

(1) 原点  $O(0, 0)$  を通る円の方程式を,  $x^2 + y^2 + ax + by = 0$  ..... とおく。

が  $A(2, 1)$ ,  $B(1, 2)$  を通ることより,

$$5 + 2a + b = 0 \dots\dots\dots, \quad 5 + a + 2b = 0 \dots\dots\dots$$

より,  $a = b = -\frac{5}{3}$  となるので, 3 点  $O, A, B$  を通る円の方程式は, により,

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y = 0, \quad \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{18} \dots\dots\dots$$

(2) 3 点  $O(0, 0, 0)$ ,  $A'(2, 1, 0)$ ,  $B'(1, 2, 0)$  を通る

球面  $S$  は, (1) から,  $xy$  平面との交線が で表されることより, その中心を  $C\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, c\right)$  とおくことができる。

さて,  $S$  の半径を  $r$  とすると, 三平方の定理から,

$$r^2 = c^2 + \frac{25}{18}$$

よって,  $S$  の方程式は,  $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{6}\right)^2 + (z - c)^2 = c^2 + \frac{25}{18}$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}y - 2cz = 0 \dots\dots\dots$$

そこで, 直線  $l: x = t + 2, y = t + 2, z = t$  と  $S$  の方程式 を連立して,

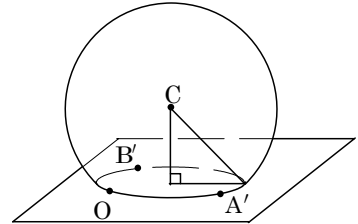
$$(t + 2)^2 + (t + 2)^2 + t^2 - \frac{5}{3}(t + 2) - \frac{5}{3}(t + 2) - 2ct = 0$$

$$3t^2 - \left(2c - \frac{14}{3}\right)t + \frac{4}{3} = 0 \dots\dots\dots$$

条件より, が実数解をもつので,  $D/4 = \left(c - \frac{7}{3}\right)^2 - 4 \geq 0$  となり,

$$\left(c - \frac{7}{3} + 2\right)\left(c - \frac{7}{3} - 2\right) \leq 0, \quad \left(c - \frac{1}{3}\right)\left(c - \frac{13}{3}\right) \geq 0$$

以上より, 求める  $C(a, b, c)$  の条件は,  $a = b = \frac{5}{6}$  で,  $c = \frac{1}{3}, \frac{13}{3}$   $c$  である。



### [ 解 説 ]

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが, 球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。

4

問題のページへ

- (1)  $q$  個の白玉と  $r$  個の赤玉が入っている 1 番の箱から 2 番に白玉を移すと、2 番の箱の白玉が  $q+1$  個であるような再配分になり、その総数  $a_2$  は  $a_2 = q$  である。

また、3 番の箱の白玉が  $q+1$  個であるような再配分には、1 番の箱から 2 番に赤玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合と、1 番の箱から 2 番に白玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合がある。その総数  $a_3$  は、

$$a_3 = r \times q + q(q+1) = q(q+r+1)$$

- (2) 1 番の箱から 2 番の箱には  $q+r$  通りの移動方法、次に 2 番の箱から 3 番の箱には  $q+r+1$  通りの移動方法、さらに 3 番の箱から 4 番の箱には  $q+r+1$  通りの移動方法、...,  $n-1$  番の箱から  $n$  番の箱には  $q+r+1$  通りの移動方法がある。これより、再配分の総数  $s_n$  は、 $s_n = (q+r)(q+r+1)^{n-2}$  である。

なお、この式は、 $n=2$  のときも成立する。

- (3)  $n$  番の箱には、 $q+1$  個の白玉と  $r$  個の赤玉が入っている場合が  $a_n$  通り、 $q$  個の白玉と  $r+1$  個の赤玉が入っている場合が  $s_n - a_n$  通りあることより、 $n$  回目の操作を行った後、 $n+1$  番の箱の白玉が  $q+1$  個であるような再配分の総数  $a_{n+1}$  は、

$$a_{n+1} = (q+1)a_n + q(s_n - a_n) = a_n + qs_n = a_n + q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$$

よって、 $a_{n+1} - a_n = q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$  .....(\*)

- (4)  $a_2 = q$  であるので、(\*)から、 $n \geq 3$  において、

$$\begin{aligned} a_n &= a_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = q + q(q+r) \sum_{k=2}^{n-1} (q+r+1)^{k-2} \\ &= q + q(q+r) \cdot \frac{(q+r+1)^{n-2} - 1}{(q+r+1) - 1} = q(q+r+1)^{n-2} \end{aligned}$$

なお、この式は、 $n=2$  のときも成立する。

### [ 解 説 ]

場合の数の問題というよりは、読解力を試すものです。我慢強く、問題文をていねいに読まなくてははいけません。なお、文系では、 $s_2$ 、 $s_3$ 、 $s_4$  および  $a_3$ 、 $a_4$  を求めるといった内容になっています。

5

問題のページへ

$$(1) f(\theta) = \sqrt{1 - \cos \theta} \text{ とおくと, } F(x) = \int_x^{x+a} f(\theta) d\theta \text{ となり,}$$

$$F'(x) = f(x+a) - f(x) = \sqrt{1 - \cos(x+a)} - \sqrt{1 - \cos x}$$

$$(2) F'(x) = 0 \text{ より, } \sqrt{1 - \cos(x+a)} = \sqrt{1 - \cos x} \text{ となり, 両辺を 2 乗して,}$$

$$1 - \cos(x+a) = 1 - \cos x, \quad \cos(x+a) - \cos x = 0, \quad -2\sin \frac{2x+a}{2} \sin \frac{a}{2} = 0$$

ここで,  $0 < a < 2\pi$  より,  $\sin \frac{a}{2} > 0$  であるので,  $\sin \frac{2x+a}{2} = 0 \dots\dots\dots (*)$

すると,  $0 < x < 2\pi$  から  $\frac{a}{2} < \frac{2x+a}{2} < 2\pi + \frac{a}{2}$  となり,  $0 < \frac{a}{2} < \pi$  に留意して, (\*) を

満たす  $x$  の範囲を求めると,

$$\pi - \frac{2x+a}{2} = 2\pi, \quad \pi - \frac{a}{2} = x = 2\pi - \frac{a}{2}$$

$$(3) F(x) = \int_x^{x+a} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta = \int_x^{x+a} \sqrt{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = \sqrt{2} \int_x^{x+a} \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$\text{ここで, } \frac{\theta}{2} = \varphi \text{ とおくと, } d\theta = 2d\varphi \text{ となり, } F(x) = 2\sqrt{2} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+a}{2}} |\sin \varphi| d\varphi$$

さて, (2) より  $F(x)$  の増減は右表のようになり,  $F(x)$

は  $x = \pi - \frac{a}{2}$  のとき極大,

$x = 2\pi - \frac{a}{2}$  のとき極小となる。

$x$	0	...	$\pi - \frac{a}{2}$	...	$2\pi - \frac{a}{2}$	...	$2\pi$
$F'(x)$		+	0	-	0	+	
$F(x)$		↗		↘		↗	

$$\text{極大値は, } F\left(\pi - \frac{a}{2}\right) = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi-a}{2}}^{\frac{\pi+a}{2}} |\sin \varphi| d\varphi = 4\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+a}{4}} \sin \varphi d\varphi$$

$$= -4\sqrt{2} \left[ \cos \varphi \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi+a}{4}} = -4\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{4}\right) = 4\sqrt{2} \sin \frac{a}{4}$$

$$\text{極小値は, } F\left(2\pi - \frac{a}{2}\right) = 2\sqrt{2} \int_{\pi - \frac{a}{4}}^{\pi + \frac{a}{4}} |\sin \varphi| d\varphi = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{a}{4}} \sin \varphi d\varphi$$

$$= -4\sqrt{2} \left[ \cos \varphi \right]_0^{\frac{a}{4}} = 4\sqrt{2} \left(1 - \cos \frac{a}{4}\right)$$

### [ 解 説 ]

定積分の計算問題です。(1)と(2)の誘導に従えば, 方針に迷うことはありません。なお, 極大値と極小値の計算では, 三角関数の周期性を利用しています。