1　解答解説のページへ

実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[\,-2.1\,]=-3$ である。

(1)　$n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2)　$[\,x\,]^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3)　x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[\,x\,]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす x をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について，以下の 3 つの条件を考える。

(i)　$a+d=ad-bc=0$

(ii)　$A^2=O$

(iii) ある自然数 n に対して $A^n=O$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　(i)ならば(ii)であることを示せ。

(2)　(iii)ならば $ad-bc=0$ であることを示せ。

(3)　(iii)ならば(i)であることを示せ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を l とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 S が直線 l と共有点をもつとき，$a,\ b,\ c$ の満たす条件を求めよ。

4

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　a_2, a_3 を求めよ。

(2)　s_n を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　a_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる x の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。