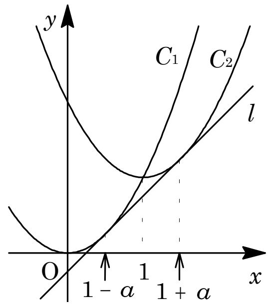
1

問題のページへ

(1) 放物線 $C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ ……②に対して,

①より, $y' = 2x$ となり, 接点 $(t,\ t^2)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$



②③を連立して, $x^2 - 4ax + 4a = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a + t)x + 4a + t^2 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

放物線②と接線③が接することより, ④は重解をもち,

$$D/4 = (2a + t)^2 - (4a + t^2) = 0,\quad a^2 + at - a = 0$$

$a > 0$ から, $a + t - 1 = 0$, $t = 1 - a$ ………⑤

③に代入すると, 接線 l の方程式は,

$$y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2) ④の重解は, ⑤より, $x = 2a + t = 2a + 1 - a = 1 + a$

また, ①と②の交点は, $x^2 = x^2 - 4ax + 4a$ より, $x = 1$

よって, C_1, C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_{1-a}^{1} \{x - (1 - a)\}^2 dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1 + a)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 - a)\}^3\Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 + a)\}^3\Big]_{1}^{1+a}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

[解 説]

よく見かける構図で, 過去に多数の大学で出題されてきた頻出問題です。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$A^2 - A + E = O$ ……①に対して，$A - A^2 = E$ となり，

$$A(E-A) = (E-A)A = E$$

よって, A は逆行列をもち，$A^{-1} = E - A$ ……②である。

(2)　ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ ………③

①③より，$(-a-d+1)A + (ad-bc-1)E = O$ ………④

(i)　$-a-d+1=0$ のとき

④より，$ad-bc-1=0$ となり，$a+d=1$，$ad-bc=1$

(ii)　$-a-d+1 \neq 0$ のとき

④より，$A = \dfrac{ad-bc-1}{a+d-1}E$ となり，$k = \dfrac{ad-bc-1}{a+d-1}$ とおくと，$A = kE$ である。

①に代入すると，$(k^2-k+1)E = O$ となり，$k^2-k+1=0$

ところが，$k = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ となり，行列 A の成分が実数であることに反する。

(i)(ii)より，$a+d=1$，$ad-bc=1$

(3)　②より，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}$ であり，一方，条件から $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ なので,

$1-a=a$ ………⑤，$-b=c$ ………⑥，$1-d=d$ ………⑦

⑤⑦より，$a=d=\dfrac{1}{2}$ ………⑧

(2)から $ad-bc=1$ なので，⑥⑧を代入すると，$\dfrac{1}{4}+b^2=1$ から，$b^2=\dfrac{3}{4}$

すると, $b>0$ より $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，⑥から $c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるので,

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

[解 説]

行列の方程式について，参考書の例題に載っているような問題です。

3

問題のページへ

(1)　条件より, $r>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ であり,

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

すると, 帰納的に，$a_n>0$，$b_n>0$ である。

さて，$a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r\cos\theta+r}{2}=r\cdot\dfrac{\cos\theta+1}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+1}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって，$\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2)　0 以上の整数 n に対して，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であることを, 数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ より，$\dfrac{a_0}{b_0}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ となり成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ すなわち $a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成り立つと仮定すると,

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2^k}+1}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

よって，$\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $n\geqq 0$ において，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ である。

(3)　(2)より，$b_{n+1}=b_n\cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ なので, $n\geqq 1$ で,

$$\begin{aligned}b_n&=b_0\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\end{aligned}$$

すると，
$$\begin{aligned}b_n\sin\frac{\theta}{2^n}&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}\sin\frac{\theta}{2^n}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\\&=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2^n}r\sin\theta\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\frac{1}{2^n}r\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

[解　説]

漸化式と極限についての問題です。解法の流れを読み取ることは難しくありません。ただ, (3)で, 数列$\{b_n\}$の一般項を, 2 倍角の公式を用いてまとめる部分は, 経験がものをいいます。

4

問題のページへ

(1)　C_1，C_2 を定数として，$I_1=\int te^t dt = te^t-\int e^t dt=(t-1)e^t+C_1$

$$I_2=\int t^2e^t dt=t^2e^t-2I_1=t^2e^t-2(t-1)e^t+C_2=(t^2-2t+2)e^t+C_2$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ に対して，

$$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)dt=\int_0^x e^{t-x}t(1-t)dt+\int_x^1 e^{-t+x}t(1-t)dt$$

さて，$\displaystyle\int_0^x e^{t-x}t(1-t)dt=e^{-x}\int_0^x(te^t-t^2e^t)dt=e^{-x}\Big[\,I_1-I_2\,\Big]_0^x$

$$=e^{-x}\Big[(-t^2+3t-3)e^t\Big]_0^x=e^{-x}\left\{(-x^2+3x-3)e^x+3\right\}$$
$$=-x^2+3x-3+3e^{-x}$$

また，$-t=u$ とおくと，

$$\int_x^1 e^{-t+x}t(1-t)dt=e^x\int_x^1(te^{-t}-t^2e^{-t})dt=e^x\int_{-x}^{-1}(-ue^u-u^2e^u)(-du)$$
$$=e^x\Big[\,I_1+I_2\,\Big]_{-x}^{-1}=e^x\Big[(u^2-u+1)e^u\Big]_{-x}^{-1}$$
$$=e^x\left\{3e^{-1}-(x^2+x+1)e^{-x}\right\}=3e^{x-1}-(x^2+x+1)$$

したがって，$f(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-2x^2+2x-4$

(3)　(2)より，$f'(x)=-3e^{-x}+3e^{x-1}-4x+2$，$f''(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-4$ となり，

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{-\frac{1}{2}}-2+2=0$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{-\frac{1}{2}}-4=\frac{6}{\sqrt{e}}-4=\frac{2}{\sqrt{e}}(3-2\sqrt{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{9-4e}{3+2\sqrt{e}}$$

ここで，$4e>4\times2.7=10.8$ から，$f''\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$ である。

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となる。

[解 説]

(2)の積分を計算するうえで，(1)の誘導がかなり役に立ちます。また，(3)では，増減表は作成しにくいので，第 2 次導関数の値を利用しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　n 回目に 1 本目の当たりくじが出るのは，1 回目から $n-1$ 回目までは，はずれくじ, n 回目に当たりくじを引く場合より，その確率は,

$$\frac{{}_{100}\mathrm{P}_{n-1}\times 2}{{}_{102}\mathrm{P}_{n}}=\frac{\dfrac{100!}{(101-n)!}\times 2}{\dfrac{102!}{(102-n)!}}=\frac{2(102-n)}{101\cdot 102}=\frac{102-n}{5151}$$

なお，この式は $n=1$，$n=102$ のときも成立する。

(2)　A が n 回目に 1 本目の当たりくじを引くのは，$n=3k+1\ (0\leqq k\leqq 33)$ のときより，その確率は,

$$\sum_{k=0}^{33}\frac{102-(3k+1)}{5151}=\frac{1}{5151}\sum_{k=0}^{33}(101-3k)=\frac{1}{5151}\left(101\times 34-3\cdot\frac{1}{2}\times 33\times 34\right)$$
$$=\frac{17}{5151}(101\times 2-3\times 33)=\frac{103}{303}$$

同様に, B が n 回目に 1 本目の当たりくじを引くのは，$n=3k+2\ (0\leqq k\leqq 33)$ のときより，その確率は,

$$\sum_{k=0}^{33}\frac{102-(3k+2)}{5151}=\frac{1}{5151}\sum_{k=0}^{33}(100-3k)=\frac{1}{5151}\left(100\times 34-3\cdot\frac{1}{2}\times 33\times 34\right)$$
$$=\frac{17}{5151}(100\times 2-3\times 33)=\frac{1}{3}$$

また, C が n 回目に 1 本目の当たりくじを引く確率は,

$$1-\frac{103}{303}-\frac{1}{3}=\frac{33}{101}$$

[解 説]

確率の基本問題です。計算も予想よりは簡単でした。