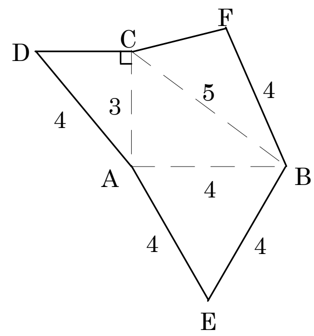
1

問題のページへ



右図において，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$ より，

$$\angle BAC=90^\circ$$

また，$\angle ACD=90^\circ$ より，

$$CD=CF=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

さて，三角錐 V の底面△ABC を xy 平面上にとり，$A(0,\ 0,\ 0)$，$B(4,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 3,\ 0)$ とする。さらに，V のもう 1 つの頂点を $P(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とおく。

すると，$PA=PB=4$，$PC=\sqrt{7}$ から，

$$x^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots①,\ (x-4)^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots②$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2\cdots\cdots\cdots④$

②③より，$-4x+3y=1$ となり，④を代入すると，$y=3\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，$z^3=3$ となり，$z>0$ から $z=\sqrt{3}$ である。

以上より，三角錐 V の体積は，

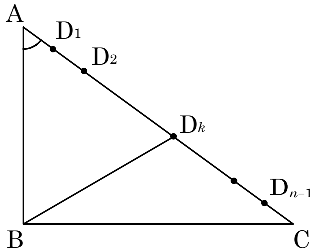
$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

[解 説]

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。

2

問題のページへ



(1)　条件より，$\mathrm{AD}_k=\dfrac{k}{n}\alpha$ となり，$\mathrm{AB}=l$ とおくと，

$$\cos A=\frac{l}{\alpha}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABD}_k$ に余弦定理を適用して，

$$(L_k)^2=l^2+\left(\frac{k}{n}\alpha\right)^2-2l\cdot\frac{k}{n}\alpha\cdot\frac{l}{\alpha}$$

$$=l^2+\frac{\alpha^2}{n^2}k^2-\frac{2l^2}{n}k$$

よって，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}\left(l^2+\frac{\alpha^2}{n^2}k^2-\frac{2l^2}{n}k\right)$

$$=l^2(n-1)+\frac{\alpha^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2l^2}{n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\alpha^2$$

(2)　(1)の結果より，

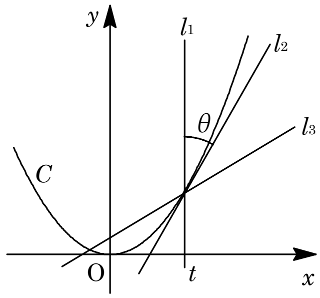
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\alpha^2=\frac{\alpha^2}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{\alpha^2}{3}$$

[解　説]

辺 AB の長さを設定するときは不安がよぎりますが，大切なのは，楽天的に計算を進めることです。

3

問題のページへ



(1)　まず，$l_1 : x = t$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は，$\overrightarrow{u_1} = (0,\ 1)$ とおくことができる。

また，$C : y = \dfrac{x^2}{4}$ ……①より $y' = \dfrac{x}{2}$ となるので，点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 l_2 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_2}$ は，$\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(2,\ t)$ から，$\overrightarrow{u_2} = (2,\ t)$ とおける。

すると，l_1 と l_2 のなす角 θ は，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{t}{1\times\sqrt{4+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　直線 l_3 の方向ベクトル $\overrightarrow{u_3}$ を，$\overrightarrow{u_3} = (1,\ m)$ とおくと，l_2 と l_3 のなす角が θ より，

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}}{|\overrightarrow{u_2}||\overrightarrow{u_3}|} = \frac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}} \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}} = \dfrac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}$，$t^2(1+m^2) = (2+tm)^2$ となり，

$$4tm = t^2 - 4,\quad m = \frac{t^2-4}{4t} \cdots\cdots\cdots ④$$

よって，l_3 の方程式は，$y - \dfrac{t^2}{4} = \dfrac{t^2-4}{4t}(x-t)$，$y = \dfrac{t^2-4}{4t}x + 1 \cdots\cdots\cdots$ ⑤

(3)　⑤より，l_3 は t の値によらず，点 $(0,\ 1)$ を通る。

(4)　④⑤より，l_3 は $y = mx+1$ ……⑥と表せ，①と連立して，

$$\frac{x^2}{4} - mx - 1 = 0,\quad x^2 - 4mx - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x = \alpha,\ \beta$ とおく。すると，l_3 と C の 2 つの共有点は，$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha+1)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta+1)$ と表され，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\alpha-\beta)^2 + (m\alpha+1-m\beta-1)^2 = (1+m^2)(\alpha-\beta)^2\\ &= (1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\} = (1+m^2)\{(4m)^2+16\} = 16(1+m^2)^2\end{aligned}$$

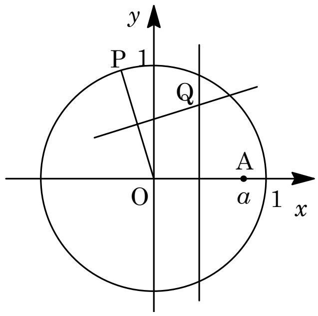
これより，線分 PQ の長さが最小になるのは $m = 0$ のとき，すなわち $t > 0$ に注意すると，④から $t = 2$ の場合である。

[解 説]

いろいろな解法が考えられる問題です。(4)では，(3)の結果を用いて，l_3 の式をいったんリセットしています。

4

問題のページへ



(1)　まず，$OQ=AQ$ より，$Q(x,\ y)$ は線分 OA の垂直二等分線上にあるので，

$$x=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$OQ=PQ$ より，Q は線分 OP の垂直二等分線上にある。そこで，OP の中点の座標 $\left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right)$ と，$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

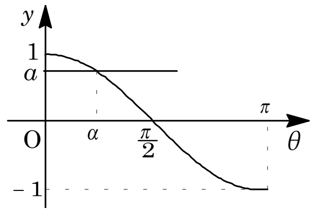
$$\cos\theta\left(x-\frac{\cos\theta}{2}\right)+\sin\theta\left(y-\frac{\sin\theta}{2}\right)=0$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$y\sin\theta=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta$ となり，$0<\theta<\pi$ から $\sin\theta\neq 0$ なので，

$$y=\frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$Q\left(\frac{a}{2},\ \frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$ である。



(2)　③より，$y'=\frac{a\sin^2\theta-(1-a\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{a-\cos\theta}{2\sin^2\theta}$

$0<a<1$ から，右図のように，$a=\cos\alpha$ とおくと，y の増減は右下表のようになる。

よって，$\theta=\alpha$ において y は最小となり，このとき $\sin\alpha=\sqrt{1-a^2}$ から，最小値は，

$$y=\frac{1-a\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
y'		－	0	＋	
y		↘		↗	

[解　説]

微分の応用についての頻出タイプの問題です。基本手法の確認のために適切な内容です。

5

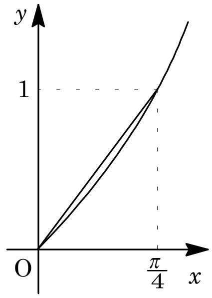
問題のページへ

(1)　$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\dfrac{\pi}{4}$

(2)　$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$

$=\Big[\dfrac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n=\dfrac{1}{2n+1}-a_n$ ………①



(3)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，曲線 $y=\tan x$ は下に凸なので，

$0\leqq\tan x\leqq\dfrac{4}{\pi}x$，$0\leqq\tan^{2n}x\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}$ ………②

②を 0 から $\dfrac{\pi}{4}$ まで積分すると，$0\leqq a_n\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^{2n}dx$

$0\leqq a_n\leqq\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\Big[\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\dfrac{\pi}{4(2n+1)}$

すると, $n\to\infty$ のとき $\dfrac{\pi}{4(2n+1)}\to 0$ より，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

(4)　①の両辺に $(-1)^{n+2}$ をかけると,

$(-1)^{n+2}a_{n+1}=-(-1)^{n+2}a_n+\dfrac{(-1)^{n+2}}{2n+1}=(-1)^{n+1}a_n+\dfrac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$

$n\geqq 2$ において，$(-1)^{n+1}a_n=(-1)^2a_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k+2}}{2k+1}=1-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

$(-1)^{n+1}a_n=1-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-\dfrac{(-1)^2}{1}=-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

以上より, (3)から，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}a_n+\dfrac{\pi}{4}\right\}=\dfrac{\pi}{4}$

[解 説]

細かい詰めがやや面倒ですが, (4)の設問にある有名な級数の値を求める問題です。なお, (2)と(3)の設問は並列で，両者の結果が(4)に繋がるという解法をとっています。