

1

問題のページへ

(1)  $f(x) = |(x-\alpha)(x-\beta)|$  に対し、次の区間における  $f(x)$  の最大値  $M$  を考えると、

0  $x$   $\alpha$  における最大値は、 $M = f(0) = \alpha\beta$

$\alpha$   $x$   $\beta$  における最大値は、

$$M = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left|\frac{\beta-\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha-\beta}{2}\right| = \frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$

$\beta$   $x$  2 における最大値は、

$$M = f(2) = (2-\alpha)(2-\beta)$$

これより、0  $x$  2 において、 $f(x) = M$  となる  $x$  がちょうど 3 つある条件は、

$$\alpha\beta = \frac{(\beta-\alpha)^2}{4} \dots\dots\dots, \quad \alpha\beta = (2-\alpha)(2-\beta) \dots\dots\dots$$

$$\text{より、} \alpha^2 - 6\alpha\beta + \beta^2 = 0, \quad (\alpha+\beta)^2 - 8\alpha\beta = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より、} 4 - 2\alpha - 2\beta = 0, \quad \alpha + \beta = 2 \dots\dots\dots$$

$$\text{から } \alpha\beta = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$$

より、 $\alpha, \beta$  は 2 次方程式  $t^2 - 2t + \frac{1}{2} = 0$  の 2 つの解より、 $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$  であり、 $0 < \alpha < \beta < 2$  から、

$$\alpha = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, \quad \beta = \frac{2+\sqrt{2}}{2}, \quad M = \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

(2)  $f(x) - mx = 0$  が異なる 3 つの解をもつ条件は、 $y = f(x)$  のグラフと直線  $y = mx$  が異なる 3 つの共有点をもつことである。

まず、 $\alpha$   $x$   $\beta$  において、より、

$$f(x) = -(x-\alpha)(x-\beta) = -x^2 + (\alpha+\beta)x - \alpha\beta = -x^2 + 2x - \frac{1}{2}$$

そこで、 $y = f(x)$  と  $y = mx$  の共有点の条件は、

$$-x^2 + 2x - \frac{1}{2} = mx, \quad x^2 + (m-2)x + \frac{1}{2} = 0$$

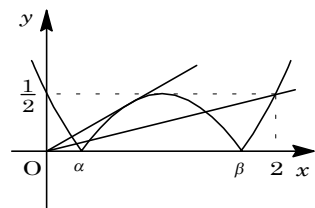
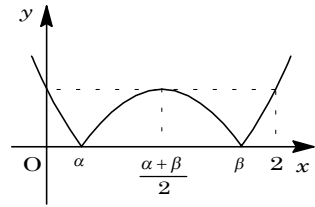
重解をもつことより、 $D = (m-2)^2 - 2 = 0$  となり、

右図から、 $m = 2 - \sqrt{2}$

また、直線  $y = mx$  が点  $(2, \frac{1}{2})$  を通るとき、 $m = \frac{1}{4}$

である。

よって、求める  $m$  の範囲は、右図より、 $\frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2}$  である。



[ 解 説 ]

絶対値つきの関数を題材にした文系風の頻出問題です。

2

問題のページへ

(1)  $a_n = d_n, b_n = c_n$  を数学的帰納法によって示す。

(i)  $n=1$  のとき

$a_1 = d_1 = 2, b_1 = c_1 = 1$  より、成立する。

(ii)  $n=k$  のとき

$a_k = d_k, b_k = c_k$  と仮定すると、

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_k + b_k & a_k + 2b_k \\ 2b_k + a_k & b_k + 2a_k \end{pmatrix}$$

よって、 $a_{k+1} = d_{k+1}, b_{k+1} = c_{k+1}$  となり、 $n=k+1$  のときも成立する。

(i)(ii)より、 $a_n = d_n, b_n = c_n$  である。

(2)  $A^{n+2} = A^{n+1} A = \begin{pmatrix} 2a_n + b_n & a_n + 2b_n \\ 2b_n + a_n & b_n + 2a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  より、

$$a_{n+2} = 2(2a_n + b_n) + a_n + 2b_n = 5a_n + 4b_n = a_n + 2(2a_n + 2b_n)$$

これより、 $a_n$  と  $a_{n+2}$  の偶奇は一致する。

すると、 $a_1 = 2, a_2 = 2a_2 + b_2 = 5$  であることから、帰納的に、 $n$  が奇数ならば  $a_n$  は偶数、また  $n$  が偶数ならば  $a_n$  は奇数となる。

[ 解 説 ]

(2)は簡略に記しましたが、数学的帰納法の証明スタイルでも構いません。

3

問題のページへ

(1)  $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2+1}$  に対して,  $f'(x) = \frac{6x(2x^2+1) - 3x^2 \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{6x}{(2x^2+1)^2}$

$0 < x < 1$  のとき,  $f'(x) > 0$  から,  $f(x)$  は単調に増加する。

すると,  $f(0) = 0, f(1) = 1$  から,  $0 < f(x) < 1$  である。

(2)  $f(x) - x = 0$  から,  $\frac{3x^2}{2x^2+1} = x$  となり,

$$2x^3 - 3x^2 + x = 0, \quad x(x-1)(2x-1) = 0$$

よって,  $x = 0, 1, \frac{1}{2}$

(3)  $f''(x) = \frac{6(2x^2+1)^2 - 6x \cdot 2(2x^2+1) \cdot 4x}{(2x^2+1)^4}$   
 $= \frac{-6(6x^2-1)}{(2x^2+1)^3}$

$x$	0	...	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	...	1
$f'(x)$	0	+		+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	$\frac{3}{8}$	↘	

これより,  $0 < x < 1$  における  $y = f(x)$  のグラフの概

形は右図のようになる。

(i)  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  のとき

まず,  $a_1 = \alpha$  であり, また  $0 < a_k < \alpha$  とすると,  
 $a_{k+1} = f(a_k)$  なので, グラフから  $0 < a_{k+1} < \alpha$  となる。

これより, 帰納的に  $0 < a_n < \alpha$  である。

さて,  $0 < x < \frac{1}{2}$  において,  $g(x) = \frac{3x}{2x^2+1}$  とおく。

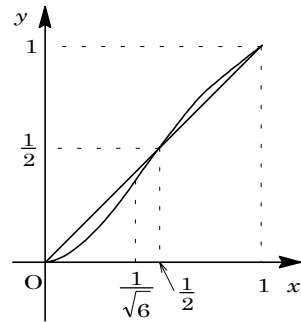
$$g'(x) = \frac{3(2x^2+1) - 3x \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-3(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$$

すると,  $f(x) = g(x) \cdot x$  であり,  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$  より,

$$a_{n+1} = g(a_n) \cdot a_n = g(\alpha) \cdot a_n$$

よって,  $0 < a_n < \alpha \{g(\alpha)\}^{n-1}$

$0 < g(\alpha) < 1$  より,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\{g(\alpha)\}^{n-1} \rightarrow 0$  となり,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  である。



$x$	0	...	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	0	↗	1

(ii)  $\alpha = \frac{1}{2}$  のとき

$a_1 = \frac{1}{2}$  であり, (2)より,  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = \frac{1}{2}$  となる。

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$  である。

(iii)  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  のとき

まず,  $a_1 = \alpha$  であり, また  $\alpha > a_k < 1$  とすると,  $a_{k+1} = f(a_k)$  なので, グラフが

ら  $\alpha < a_{k+1} < 1$  となる。

これより、帰納的に  $\alpha < a_n < 1$  である。

さて、 $a_{n+1} = \frac{3a_n^2}{2a_n^2 + 1}$  より、

$$1 - a_{n+1} = 1 - \frac{3a_n^2}{2a_n^2 + 1} = \frac{1 - a_n^2}{2a_n^2 + 1} = \frac{a_n + 1}{2a_n^2 + 1} (1 - a_n)$$

ここで、 $\frac{1}{2} < x < 1$  において、 $h(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}$  とおくと、

$$h'(x) = \frac{2x^2 + 1 - (x+1) \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-(2x^2 + 4x - 1)}{(2x^2 + 1)^2}$$

$x$	$\frac{1}{2}$	...	1
$h'(x)$		-	
$h(x)$	1	$\searrow$	$\frac{2}{3}$

$h'(x) = 0$  の解は  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{4}$  より、 $\frac{1}{2} < x < 1$  における

$h(x)$  の増減は右表のようになる。

すると、 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$  より、 $\alpha < a_n < 1$  において、

$$1 - a_{n+1} = h(a_n)(1 - a_n) = h(\alpha)(1 - a_n)$$

よって、 $0 < 1 - a_n = (1 - \alpha) \{h(\alpha)\}^{n-1}$

$0 < h(\alpha) < 1$  より、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\{h(\alpha)\}^{n-1} \rightarrow 0$  となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 0$  すなわち

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  である。

### [ 解 説 ]

記憶は定かではありませんが、漸化式で与えられた数列の極限值だけをグラフで予測せよという乱暴な問題が 20 年以上も前にありました。その流れを汲むのが(3)の問題で、漸化式をグラフで解くという知識が必須です。

4

問題のページへ

(1)  $C(p, q, r)$ とおくと、条件より  $p^2 + q^2 + r^2 = 1$  ( $r > 0$ ).....

さて、 $\angle COA = \angle COB = \theta$ 、 $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1$ であり、 $0 < \alpha < \pi$ として、  
 $\overline{OA} = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2}, 0)$ 、 $\overline{OB} = (\cos \frac{\alpha}{2}, -\sin \frac{\alpha}{2}, 0)$ となる。

そこで、 $\overline{OA} \cdot \overline{OC} = |\overline{OA}| |\overline{OC}| \cos \theta$ より、

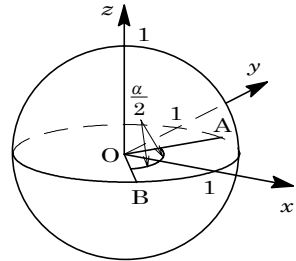
$$p \cos \frac{\alpha}{2} + q \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \theta \dots\dots\dots$$

また、 $\overline{OB} \cdot \overline{OC} = |\overline{OB}| |\overline{OC}| \cos \theta$ より、

$$p \cos \frac{\alpha}{2} - q \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \theta \dots\dots\dots$$

より、 $0 < \alpha < \pi$ から、 $q = 0$ 、 $p = \frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

より、 $r = \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}$ となり、 $C\left(\frac{\cos \theta}{\cos \frac{\alpha}{2}}, 0, \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}\right)$ である。

(2) まず、対称性より、 $C(p, 0, r)$ に対し、 $D(p, 0, -r)$ とおくことができる。

さて、 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 、 $\overline{OC}$ 、 $\overline{OD}$ の相異なる2つのベクトルのなす角がすべて等しいという条件は、 $\overline{OA}$ と $\overline{OB}$ のなす角が $\alpha$ から、 $\theta = \alpha$ かつ $\angle COD = \alpha$ と同値である。

そこで、(1)より、 $p = \frac{\cos \alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ .....

また、 $\overline{OC} \cdot \overline{OD} = |\overline{OC}| |\overline{OD}| \cos \alpha$ より、 $p^2 - r^2 = \cos \alpha$ .....

より、 $q = 0$ なので、 $p^2 + r^2 = 1$ .....

より、 $2p^2 = 1 + \cos \alpha$ となり、を代入すると、 $2 \cos^2 \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + \cos \alpha)$

$$4 \cos^2 \alpha = (1 + \cos \alpha)^2, \quad 3 \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha - 1 = 0$$

よって、 $(3 \cos \alpha + 1)(\cos \alpha - 1) = 0$ から、 $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  ( $0 < \alpha < \pi$ )となる。

すると、 $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{1}{3}$ より、 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ であり、

$$p = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad r = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

以上より、 $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

## [ 解 説 ]

空間ベクトルを題材にした計算問題です。見かけよりは時間がかかります。

5

問題のページへ

(1)  $f(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t) dt$  に対し,  $A = \int_0^1 e^t f(t) dt \dots\dots$  とおくと,

$$f(x) = Ae^x \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } A = \int_0^1 Ae^{2t} dt = A \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 = \frac{1}{2} A(e^2 - 1)$$

よって,  $(3 - e^2)A = 0$  から  $A = 0$  となり,  $f(x) = 0$  である。

(2)  $g(x) = e^x \int_0^1 e^t g(t) dt + x$  に対し,  $B = \int_0^1 e^t g(t) dt \dots\dots$  とおくと,

$$g(x) = Be^x + x \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } B = \int_0^1 e^t (Be^t + t) dt = \int_0^1 (Be^{2t} + te^t) dt$$

$$= B \left[ \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 + \left[ te^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2} B(e^2 - 1) + e - (e - 1)$$

$$= \frac{1}{2} B(e^2 - 1) + 1$$

よって,  $(3 - e^2)B = 2$  から,  $B = \frac{2}{3 - e^2}$  となり,

$$g(x) = \frac{2}{3 - e^2} e^x + x$$

### [ 解 説 ]

参考書の例題として採用されそうな定型的な問題です。