1

問題のページへ

(1)　$C: x^2+y^2-4y+2=0$ より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円 C の中心は $\mathrm{C}(0,\ 2)$，半径は $r=\sqrt{2}$ となる。

さて，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円の中心は，線分 AO の垂直二等分線上にあるので，その座標を $\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\right)$ とおくことができる。

すると，半径は，$\mathrm{BO}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+t^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}$

また，中心間距離は，$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(t-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+(t-2)^2}$

条件より，半径の和または差が中心間距離に等しいので，

$$\left|\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}+(t-2)^2},\quad \left(\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2}+(t-2)^2$$

$$\pm\sqrt{1+2t^2}=-2t+1,\quad 1+2t^2=(-2t+1)^2,\quad t^2-2t=0$$

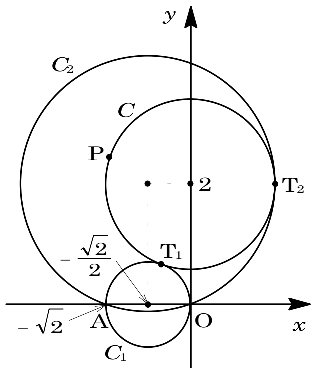
よって，$t=0,\ 2$ となり，中心の座標は $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である。

(2)　C に外接する円を C_1，C を内接する円を C_2 とし，C と C_1，C_2 の接点をそれぞれ T_1，T_2 とおく。

この 2 つの接点以外は，C 上の点 P は円 C_1 の外部，円 C_2 の内部にあり，

$$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$



さて, AO は C_1 の直径なので $\angle\mathrm{AT_1O}=90^\circ$ となり，

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$$

C_2 の中心を B_2 とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AB_2O}$ より，

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{\mathrm{B_2O}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}+2^2}}=\frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最小値は 0，最大値は $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

[解 説]

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。なお，(1)の設定の異なる類題が，文系で出ています。

2　問題のページへ

(1)　(i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 4$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$，$a_{n-1} = 4$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$，$A_{n-1}(4)$ より，

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4)$$

すると，$A_n(4) = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n + A_{n-1}(4) = A_{n-1}(4) + \frac{1}{2}(n^2 + n)$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$A_n(4) = A_1(4) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}(k^2 + k) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^2 + k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2 + k)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)　1 から 4 までの整数を重複して n 個並べる 4^n 通りの場合が同様に確からしい。

さて，$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2, 3, 4$ である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1, 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(iii)　$a_{n-1} = 4$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(4)$ 通り，また $a_n = 1, 2, 3$ より，この場合は，$A_{n-1}(4) \times 3 = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \times 3 = \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$ 通りある。

(i)(ii)(iii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1)+(n-1)n+\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)=\frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)$$

以上より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率は,

$$\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2\cdot 4^n}$$

[解 説]

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。なお，3 枚のカードの場合が，文系で出題されています。

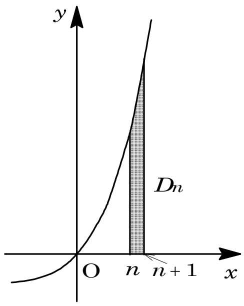
3

問題のページへ

(1)　D_n の面積 S_n は,

$$S_n=\int_n^{n+1}xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_n^{n+1}-\int_n^{n+1}e^x dx$$
$$=(n+1)e^{n+1}-ne^n-\Big[e^x\Big]_n^{n+1}$$
$$=ne^{n+1}-(n-1)e^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}=\lim_{n\to\infty}\left(e-\frac{n-1}{n}\right)=e-1$



(2)　D_n を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_n は,

$$V_n=\pi\int_n^{n+1}x^2e^{2x}dx=\pi\left\{\Big[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big]_n^{n+1}-\int_n^{n+1}xe^{2x}dx\right\}$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{2}(n+1)^2e^{2(n+1)}-\frac{1}{2}n^2e^{2n}-\Big[\frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_n^{n+1}+\int_n^{n+1}\frac{1}{2}e^{2x}dx\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2}\left\{(n+1)^2e^{2(n+1)}-n^2e^{2n}-(n+1)e^{2(n+1)}+ne^{2n}+\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_n^{n+1}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{(2n^2+2n+1)e^{2(n+1)}-(2n^2-2n+1)e^{2n}\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(2n^2+2n+1)e^{2(n+1)}-(2n^2-2n+1)e^{2n}}{n^2e^{2(n+1)}-2n(n-1)e^{2n+1}+(n-1)^2e^{2n}}$

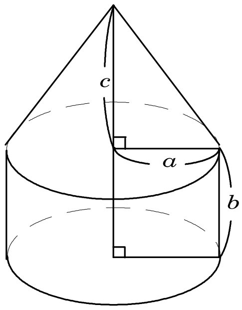
$$=\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)e^2-\left(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{e^2-2\left(1-\frac{1}{n}\right)e+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2e^2-2}{e^2-2e+1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(e+1)(e-1)}{(e-1)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e+1}{e-1}$$

[解 説]

慎重さが要求される積分の計算問題です。とりたてて工夫もせずに，計算を進めました。

4

問題のページへ



(1)　右の建物の体積 V, 底面を除く表面積 S は,

$$V=\pi a^2b+\frac{1}{3}\pi a^2c=\frac{1}{3}\pi a^2(3b+c)$$

$$S=2\pi ab+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+c^2}\cdot 2\pi a=\pi a\left(2b+\sqrt{a^2+c^2}\right)$$

(2)　(i)　$b=xa$, $c=ya$ より,

$$V=\frac{1}{3}\pi a^2(3xa+ya)=\frac{1}{3}\pi a^3(3x+y)\cdots\cdots\cdots①$$

$$S=\pi a\left(2xa+\sqrt{a^2+y^2a^2}\right)=\pi a^2\left(2x+\sqrt{1+y^2}\right)$$

①より, $x=\dfrac{V}{\pi a^3}-\dfrac{y}{3}\cdots\cdots②$となるので,

$$S=\pi a^2\left(\frac{2V}{\pi a^3}-\frac{2y}{3}+\sqrt{1+y^2}\right)=\frac{2V}{a}+\frac{\pi a^2}{3}\left(-2y+3\sqrt{1+y^2}\right)$$

ここで, $y>0$ において, $f(y)=-2y+3\sqrt{1+y^2}$ とおくと,

$$f'(y)=-2+\frac{3\cdot 2y}{2\sqrt{1+y^2}}=\frac{-2\sqrt{1+y^2}+3y}{\sqrt{1+y^2}}$$

y	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(y)$		$-$	0	$+$
$f(y)$		$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$

$f'(y)=0$ とすると, $2\sqrt{1+y^2}=3y$

$$y^2=\frac{4}{5},\quad y=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

右表より, $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき $f(y)$ は最小となり, S の最小値 T は,

$$T=\frac{2V}{a}+\frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$$

(ii)　$$\frac{dT}{da}=-\frac{2V}{a^2}+\frac{2\sqrt{5}\pi a}{3}=\frac{2\sqrt{5}\pi a^3-6V}{3a^2}$$

a	0	$\cdots$	$\left(\frac{3V}{\sqrt{5}\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$\frac{dT}{da}$		$-$	0	$+$
T		$\searrow$		$\nearrow$

右表より, $a^3=\dfrac{3V}{\sqrt{5}\pi}$ のとき T は最小となる。

このとき, $y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ なので, ②より,

$$x=\frac{V}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{5}\pi}{3V}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

以上より, T が最小になるとき,

$$a:b:c=1:x:y=1:\frac{1}{\sqrt{5}}:\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}:1:2$$

[解 説]

②から, $0<y<\dfrac{3V}{\pi a^3}$ となりますが, $\dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{3V}{\pi a^3}$ は満たされているという条件のもとで解いています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

楕円 C_1 : $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 C_2 : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点が一致することより,

$$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2 \quad (\alpha^2>\beta^2)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, C_1 と C_2 の交点の座標を $(p,\ q)$ とおくと,

$$\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{q^2}{\beta^2}=1,\ \beta^2p^2+\alpha^2q^2=\alpha^2\beta^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=1,\ b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, 交点 $(p,\ q)$ における C_1 と C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とおくと,

$$l_1 : \frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1,\ l_2 : \frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

これより, l_1, l_2 の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$ は, $\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{p}{\alpha^2},\ \dfrac{q}{\beta^2}\right)$, $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ -\dfrac{q}{b^2}\right)$

ここで, ②③をまとめると, $\begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha^2\\ b^2 & -a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$ となり,

$$\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-a^2\beta^2-\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}-a^2 & -\alpha^2\\ -b^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}a^2\alpha^2\beta^2+a^2\alpha^2b^2\\ \alpha^2b^2\beta^2-a^2b^2\beta^2\end{pmatrix}$$

すると, $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\dfrac{p^2}{\alpha^2a^2}-\dfrac{q^2}{\beta^2b^2}=\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\beta^2+b^2)-\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\alpha^2-a^2)$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(-\alpha^2+\beta^2+a^2+b^2)$$

①より, $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ となるので, 2 接線 l_1, l_2 は直交する。

[解 説]

文字が多くて計算は簡単ではありませんが, 楕円と双曲線についての有名問題です。