1

問題のページへ

(1) 条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$……①, $4x+3y+2z=1$……②に対して,

②から $z=-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}$ となり, ①に代入すると,

$$x \leqq y \cdots\cdots ③,\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \cdots\cdots ④,\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \cdots\cdots ⑤$$

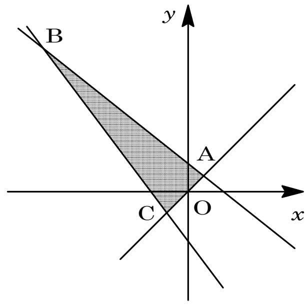
すると, ④より $y \leqq -\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$, ⑤より $y \geqq -\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点を A とすると, $x=-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}$ から, $x=\frac{1}{9}$, $y=\frac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点を B とすると, $-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から, $x=-1$, $y=1$

③⑤の境界線の交点を C とすると, $x=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$ から, $x=-\frac{1}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

よって, ③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり, x の最大値は点 A の x 座標から $\frac{1}{9}$, y の最小値は点 C の y 座標より $-\frac{1}{7}$ である。



(2) $P=3x-y+z$ とおくと, ②より,

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより, $y=\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}P$ となり, 傾き $\frac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって, 点 B を通るとき P は最小となり, 最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また, 点 C を通るとき, P は最大となり, 最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より, $-3 \leqq 3x-y+z \leqq \frac{5}{7}$ である。

[解 説]

(1)の問題文で示唆されているように, z を消去すれば, 領域と最大・最小の典型題となります。

2

問題のページへ

(1)　$A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$ より，

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また，$B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\frac{5}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$より，

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2)　条件より，O，P，P′ が同一直線上にあるので，t を実数として，

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\ \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2})$$

(1)より，$2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3})$

$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は 1 次独立なので，

$$2+\frac{1}{2}q=t\cdots\cdots\cdots①,\ p=ta\cdots\cdots\cdots②,\ \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$p=\left(2+\frac{1}{2}q\right)a$，すなわち $2p=(4+q)a$ となる。

ここで，$q=-4$ のときは①から $t=0$ となり，③が成立しないことより，

$$a=\frac{2p}{4+q}\cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$\frac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\frac{1}{2}q\right)b$ となり，$b=\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　条件より，$|\overrightarrow{A_0P}|=1$ から，$|a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}|=1$ となり，$|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$ なので，$a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると，$\left(\frac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$，$2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，$\overrightarrow{B_0P}=p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$ であり，

$$|\overrightarrow{B_0B_1}|=|\overrightarrow{B_0B_2}|=1,\ \overrightarrow{B_0B_1}\cdot\overrightarrow{B_0B_2}=0$$

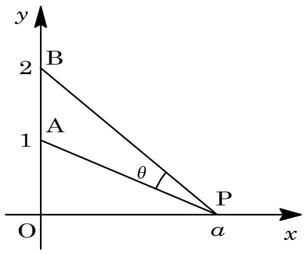
そこで，B_0 を原点とし，$\overrightarrow{B_0B_1}$ を p 軸の基本ベクトル，$\overrightarrow{B_0B_2}$ を q 軸の基本ベクトルとして，平面 β 上で直交座標系をつくることができる。このとき，点 P′ の座標は $(p,\ q)$ となるので，⑥より，点 P′ が動いてできる図形 C' は楕円である。

[解 説]

大学入試に久々の登場ですが，空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

3

問題のページへ



(1)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2+1}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{a^2+4}$ より，

$$\cos\theta=\frac{(a^2+1)+(a^2+4)-1}{2\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+4}}=\frac{a^2+2}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$$

(2)　(1)から，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{(a^2+2)^2}{(a^2+1)(a^2+4)}}$

ここで，$a^2=t>0$ とおくと，

$$\cos\theta=\sqrt{f(t)},\quad f(t)=\frac{(t+2)^2}{(t+1)(t+4)}$$

すると，$f'(t)=\dfrac{2(t+2)(t+1)(t+4)-(t+2)^2(2t+5)}{(t+1)^2(t+4)^2}=\dfrac{(t+2)(t-2)}{(t+1)^2(t+4)^2}$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となり，$\cos\theta$ も最小になる。

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta$ は単調に減少することから，$t=2$ すなわち $a=\sqrt{2}$ のとき，θ は最大となる。

[解 説]

余弦定理と微分法を組合せた問題です。なお，余弦定理のかわりに内積を利用することもできますし，微分法のかわりに相加平均と相乗平均の関係を利用することもできます。

4

問題のページへ

(1)　$I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$ より，

(i)　$m\neq\pm n$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0$$

(ii)　$m=n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2mx+1)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2mx}{2m}+x\right]_0^{2\pi}=\pi$$

(iii)　$m=-n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,-m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2mx)\,dx=\pi$$

(iv)　$m=n=0$ のとき

$$I_{0,\,0}=\int_0^{2\pi}dx=2\pi$$

(2)　$J_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\Big)^2dx=\int_0^{2\pi}(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\cdots+\sqrt{n}\cos nx)^2dx$

(1)より，$m\neq n$ のとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ なので，

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\cos^2x+2\cos^2 2x+\cdots+n\cos^2 nx)\,dx=I_{1,\,1}+2I_{2,\,2}+\cdots+nI_{n,\,n}$$

$$=(1+2+\cdots+n)\pi=\frac{1}{2}n(n+1)\pi$$

[解　説]

定積分の有名問題です。(1)では，m，n が自然数だけではないので，場合分けが増えてしまいます。

5

問題のページへ

(1)　2 回目に終了する場合は, 2 回同じ目が出る場合で, その確率は,

$$\frac{6\times1}{6^2}=\frac{1}{6}$$

また, 3 回目に終了する場合は, 1 回目は任意の目, 2 回目は 1 回目と異なる目, 3 回目は 2 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5\times1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

さらに, 4 回目に終了する場合は, 1 回目は任意の目, 2 回目, 3 回目はその前の回の目と異なる目, 4 回目は 3 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^2\times1}{6^4}=\frac{25}{216}$$

以上より, 4 回目以内に終了する確率は,

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}$$

(2)　ちょうど k 回目に終了する場合は, $k\geqq3$ のとき, 1 回目が任意の目, 2 回目から $k-1$ 回目までは, その前の回の目と異なる目が出て, k 回目に $k-1$ 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^{k-2}\times1}{6^k}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

この式に $k=2$ をあてはめると $\frac{1}{6}$ となり, 成立している。

よって, r 回目以内に終了する確率は,

$$\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$$

[解　説]

センターレベルの基本的な確率計算と等比数列の和の融合問題です。文系に類題が出ています。