

1

解答解説のページへ

(1) $e^{2a} - 2e^a - 1 = 0$ から, $e^a > 0$ なので, $e^a = 1 + \sqrt{2}$

よって, $a = \log(1 + \sqrt{2})$

(2) $F(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^x + e^{2t}} dx = [\log(e^x + e^{2t})]_0^t = \log(e^t + e^{2t}) - \log(1 + e^{2t}) = \log \frac{e^t + e^{2t}}{1 + e^{2t}}$

(3) $f(t) = \frac{e^t + e^{2t}}{1 + e^{2t}}$ とおくと, $F(t) = \log f(t)$ となり,

$$f'(t) = \frac{(e^t + 2e^{2t})(1 + e^{2t}) - (e^t + e^{2t}) \cdot 2e^{2t}}{(1 + e^{2t})^2}$$

$$= \frac{-e^{3t} + 2e^{2t} + e^t}{(1 + e^{2t})^2}$$

$$= -\frac{e^t(e^{2t} - 2e^t + 1)}{(1 + e^{2t})^2}$$

t	0	...	$\log(1 + \sqrt{2})$...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		\nearrow		\searrow

(1)より, $f'(t) = 0$ となるのは $t = \log(1 + \sqrt{2})$ から, $f(t)$ の最大値は,

$$f(\log(1 + \sqrt{2})) = \frac{(1 + \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})^2}{1 + (1 + \sqrt{2})^2} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4 + 2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

したがって, $F(t)$ の最大値は $\log \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ ($t = \log(1 + \sqrt{2})$) である。

[解 説]

(3)において, $f'(t) = 0$ の解を求める際に, (1)の結果が役立ちます。

2

解答解説のページへ

(1) 条件より, $a_{n+1} = (\cos x + \cos y)a_n + (\sin x - \sin y)b_n$

$$b_{n+1} = (-\sin x + \sin y)a_n + (\cos x + \cos y)b_n$$

ここで, $u = \cos x + \cos y$, $v = \sin x - \sin y$ とおくと,

$$a_{n+1} = ua_n + vb_n, \quad b_{n+1} = -va_n + ub_n$$

$$\begin{aligned} \text{すると, } a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 &= (ua_n + vb_n)^2 + (-va_n + ub_n)^2 \\ &= (u^2 + v^2)a_n^2 + (u^2 + v^2)b_n^2 \\ &= (u^2 + v^2)(a_n^2 + b_n^2) \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 \\ &= 2 + 2(\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2\{1 + \cos(x + y)\} \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{より, } c_{n+1} = 2\{1 + \cos(x + y)\}c_n$$

よって, $c_1 = a_1^2 + b_1^2 = 1$ から,

$$c_n = c_1 \cdot 2^{n-1} \{1 + \cos(x + y)\}^{n-1} = 2^{n-1} \{1 + \cos(x + y)\}^{n-1}$$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ となる必要十分条件は, (1)より,

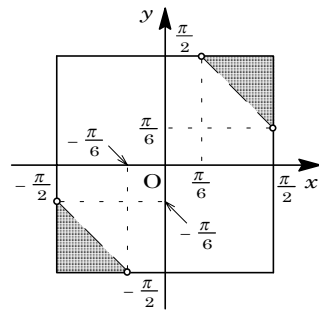
$$-1 < 2\{1 + \cos(x + y)\} < 1, \quad -\frac{3}{2} < \cos(x + y) < -\frac{1}{2} \dots\dots\dots (*)$$

ここで, 条件から $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ な

ので, $-\pi < x + y < \pi$ となり, (*)から,

$$-\pi < x + y < -\frac{2}{3}\pi, \quad \frac{2}{3}\pi < x + y < \pi$$

よって, これらの不等式を満たす点 (x, y) の範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 実線の境界は含み, 破線の境界は含まない。



[解 説]

問題文は行列で設定されていますが, 解くうえで必要なのは, 数列の知識です。

3

解答解説のページへ

- (1) 実数 t に対して $t \leq k \leq t+1$ となる自然数 k をとると, $t^m \leq k^m \leq (t+1)^m$ から,

$$\int_{k-1}^k t^m dt \leq \int_{k-1}^k k^m dt \leq \int_{k-1}^k (t+1)^m dt, \quad \int_{k-1}^k t^m dt \leq k^m \leq \int_{k-1}^k (t+1)^m dt$$

k を 1 から n まで変化させて和をとると,

$$\sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k t^m dt \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k (t+1)^m dt$$

$$\text{よって, } \int_0^n t^m dt \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \int_0^n (t+1)^m dt$$

- (2) (1)より, $\frac{n^{m+1}}{m+1} \leq \sum_{k=1}^n k^m \leq \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} < \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} \dots\dots\dots$

ここで, $f(x)$ を r 次の整式とすると, $f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_1x + a_0$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^n k^r + a_{r-1} \sum_{k=1}^n k^{r-1} + \dots + a_1 \sum_{k=1}^n k + a_0 n$$

$$\text{より, } \frac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{n^r}{r} + \dots + a_1 \frac{n^2}{2} + a_0 n \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\frac{1}{r+1} + a_{r-1} \frac{1}{rn} + \dots + a_1 \frac{1}{2n^{r-1}} + a_0 \frac{1}{n^r} \leq \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\text{より, } \sum_{k=1}^n f(k) < \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1} \frac{(n+1)^r}{r} + \dots + a_1 \frac{(n+1)^2}{2} + a_0 n$$

$$\frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) < \frac{1}{r+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r+1} + \frac{a_{r-1}}{rn} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^r + \dots + \frac{a_1}{2n^{r-1}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{a_0}{n^r}$$

$$\text{以上より, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{r+1} \dots\dots\dots$$

- (3) 条件より, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n) \dots\dots\dots$ なので, $\frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{f(n)}{n^r}$

$n \rightarrow \infty$ とすると, $f(n)$ の r 次の係数は 1 なので, より, $\frac{1}{r+1} = \frac{1}{2} \times 1$

すると, $r=1$ から $f(x) = x + a$ とおくことができ, より,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k+a) = \frac{1}{2} (n+a), \quad \frac{1}{2} (n+1) + a = \frac{1}{2} (n+a)$$

よって, $a = -1$ となるので, $f(x) = x - 1$

[解 説]

(3)では, (2)の結論の利用方法がポイントです。この誘導を明確に示す記述力が問われています。

4

解答解説のページへ

$$(1) a_1 = 1+i, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n - 3} \dots\dots \text{より,}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1 - 3} = \frac{1+i}{2(1+i) - 3} = \frac{1+i}{-1+2i} = \frac{1-3i}{5}$$

3点 $0, a_1, a_2$ を通る円の中心を $p+qi$ とおくと,

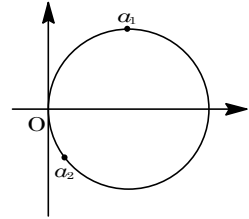
$$p^2 + q^2 = (p-1)^2 + (q-1)^2 \dots\dots\dots$$

$$p^2 + q^2 = \left(p - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(q + \frac{3}{5}\right)^2 \dots\dots\dots$$

$$\text{より } p+q-1=0, \quad \text{より } -p+3q+1=0$$

よって, $p=1, q=0$ から, 円の中心は点 1 となるので, 円周上の任意の点を z とすると, 3点 $0, a_1, a_2$ を通る円の方程式は,

$$|z-1|=1$$



$$(2) a_1 \neq 0 \text{ なので, } \text{から帰納的に } a_n \neq 0 \text{ となり,}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n - 3}{a_n} = -\frac{3}{a_n} + 2$$

$$\text{変形すると, } \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2} = -3\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1} = \left(\frac{1}{1+i} - \frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1} = -\frac{i}{2}(-3)^{n-1}$$

$$\text{よって, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}(-3)^{n-1} \text{ から, } a_n = \frac{2}{1 - (-3)^{n-1}i} \text{ となり,}$$

$$\begin{aligned} |a_n - 1| &= \left| \frac{2}{1 - (-3)^{n-1}i} - 1 \right| = \left| \frac{2 - 1 + (-3)^{n-1}i}{1 - (-3)^{n-1}i} \right| = \left| \frac{1 + (-3)^{n-1}i}{1 - (-3)^{n-1}i} \right| \\ &= \frac{|1 + (-3)^{n-1}i|}{|1 - (-3)^{n-1}i|} = \frac{\sqrt{1 + 9^{n-1}}}{\sqrt{1 + 9^{n-1}}} = 1 \end{aligned}$$

したがって, すべての a_n は円 $|z-1|=1$ 上にある。

[解 説]

有名なタイプの漸化式で, a_n を求めることは容易です。そのため, 数学的帰納法の出番はありませんでした。

5

半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において、点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると、対称性から H は BCD の重心となり、また球の中心 O は線分 AH 上にある。

さて、辺 BC の中点を M とし、3 点 A, M, D を含む平面で、正四面体 ABCD を切断したとき、その切り口は右図のようになる。

ここで、正四面体の 1 辺の長さを x とすると、

$$AD = x, \quad AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

MH : HD = 1 : 2 より、 $\cos \angle AMH = \frac{1}{3}$ となり、

$$AH = AM \sin \angle AMH = \frac{\sqrt{3}}{2}x \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また、 $HD = \frac{2}{3}DM = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ なので、OHD に三平方の定理を適用すると、

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x - 1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1, \quad x^2 - \frac{2}{3}\sqrt{6}x = 0$$

$x > 0$ より、 $x = \frac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

[解 説]

参考書などの例題に、そっくりそのまま載っている有名問題です。

解答解説のページへ

