

1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) 方程式 $e^{2a} - 2e^a - 1 = 0$ を満たす実数 a を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。
- (2) $t > 0$ に対して $F(t) = \int_0^t \frac{e^x}{e^x + e^{2t}} dx$ を求めよ。
- (3) $t > 0$ の範囲での $F(t)$ の最大値と、最大値を与える t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

x, y は $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ を満たすとする。数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を次で定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \cos y & \sin x - \sin y \\ -\sin x + \sin y & \cos x + \cos y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) $c_n = a_n^2 + b_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。
 (2) (1)の c_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ となるような (x, y) の範囲を図示せよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数 n, m に対し, $\int_0^n t^m dt = \sum_{k=1}^n k^m = \int_0^n (t+1)^m dt$ を示せ。

(2) $f(x)$ の次数を r とするとき, 次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 n に対して $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) = \frac{1}{2} f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

複素数 a_n ($n = 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$a_1 = 1 + i, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n - 3}$$

ただし、 i は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 複素数平面上の 3 点 $0, a_1, a_2$ を通る円の方程式を求めよ。
- (2) すべての a_n は(1)で求めた円上にあることを示せ。

5

解答解説のページへ

半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。