

1

問題のページへ

(1) 条件より,  $z_1 = 1$ ,  $z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n + 1 \dots\dots\dots$

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_1 + 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_2 + 1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{3}i}{2} + 1 = 1 + \sqrt{3}i$$

(2) を変形して,  $z_{n+1} - \alpha = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}(z_n - \alpha)$  となることより,

$$z_{n+1} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha + \alpha$$

よって,  $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha + \alpha = 1$ ,  $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha = 1$  から,  $\alpha = \frac{2}{1-\sqrt{3}i} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(3) (2)より,  $z_{n+1} - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(z_n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$z_n - \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \left(z_1 - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

よって,  $z_n = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(4)  $z_n = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$  のとき,  $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} + \frac{1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$  より,

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} = -1, \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1+\sqrt{3}i}{2} \dots\dots\dots$$

さて,  $\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{1+\sqrt{3}i}{2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

より,  $\cos\frac{n-1}{3}\pi + i\sin\frac{n-1}{3}\pi = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

$$\frac{n-1}{3}\pi = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}, n-1 = 6k+4, n = 6k+5$$

なお,  $n \geq 1$  より  $k \geq 0$  となるので,  $n = 6k+5$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) である。

### [ 解 説 ]

虚数係数の漸化式です。詳しくするほどの誘導がついています。

2

問題のページへ

$$(1) \quad XA - AX = kA \text{ より, } \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$(ax + cy) - (ax + bz) = ka \dots\dots\dots, \quad (bx - ay) - (ay - bx) = kb \dots\dots\dots$$

$$(az - cx) - (cx - az) = kc \dots\dots\dots, \quad (bz + ax) - (cy + ax) = -ka \dots\dots\dots$$

より  $cy - bz = ka \dots\dots\dots$  となり, と一致する。

$$\text{より } 2bx - 2ay = kb \dots\dots\dots, \quad \text{より } 2az - 2cx = kc \dots\dots\dots$$

さて,  $k = 0$  のとき, より  $cy = bz$ , より  $bx = ay$  となり,  $b \neq 0$  より,

$$z = \frac{c}{b}y, \quad x = \frac{a}{b}y$$

は  $az = cx$  となるが,  $a \cdot \frac{c}{b}y = c \cdot \frac{a}{b}y$  より満たされているので,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{a}{b}y & y \\ \frac{c}{b}y & -\frac{a}{b}y \end{pmatrix} = \frac{y}{b} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \frac{y}{b}A$$

$$(2) \quad \text{より } z = \frac{-ka + cy}{b} \dots\dots\dots, \quad \text{より } x = \frac{kb + 2ay}{2b} \dots\dots\dots$$

$$\text{を } \sim \text{ に代入すると, } 2a \cdot \frac{-ka + cy}{b} - 2c \cdot \frac{kb + 2ay}{2b} = kc, \quad -2ka^2 - 2kbc = 0$$

$$k \neq 0 \text{ より, } -a^2 - bc = 0 \dots\dots\dots$$

ここで,  $E$  を単位行列として, ハミルトン・ケーリーの定理を用いると,

$$A^2 - (a - a)A + (-a^2 - bc)E = O \dots\dots\dots$$

よって, から  $A^2 = O$  となる。

逆に,  $A^2 = O$  のとき, より  $\sim$  が成立する。このとき,  $\sim$  を満たす  $x, y, z$ , すなわち  $XA - AX = kA$  を満たす  $X$  が存在する。

$$\text{さて, } z = c \neq 0 \text{ のとき, } \text{より } cy - bc = ka, \quad y = \frac{bc + ka}{c} = \frac{ka - a^2}{c} \quad (\text{より})$$

$$\begin{aligned} \text{より, } x &= \frac{kb + 2ay}{2b} = \frac{kb + 2a \cdot \frac{ka - a^2}{c}}{2b} = \frac{kbc + 2ka^2 - 2a^3}{2bc} \\ &= \frac{-ka^2 + 2ka^2 - 2a^3}{-2a^2} = \frac{-k + 2a}{2} \quad (\text{より}) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } X = \begin{pmatrix} \frac{-k + 2a}{2} & \frac{ka - a^2}{c} \\ c & \frac{k - 2a}{2} \end{pmatrix}$$

## [ 解 説 ]

行列の成分計算を慎重に行うことに尽きます。

3

問題のページへ

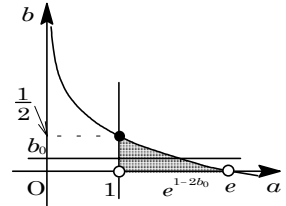
- (1)  $f(x) = e^x - a(x+2b)$  とおくと,  $f'(x) = e^x - a$   
 $a > 1$  より,  $x = 0$  における  $f(x)$  の増減は右表の  
 ようになる。

$x$	0	...	$\log a$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘		↗

よって,  $f(x) = 0$  の条件は,  $f(\log a) = 0$   
 $e^{\log a} - a(\log a + 2b) = 0, a - a(\log a + 2b) = 0$   
 $a > 0$  なので,  $\log a + 2b = 1$

- (2) (1)より,  $a, b$  の条件は,  $a > 1, b > 0, \log a + 2b = 1$  から,  
 $a > 1, 0 < b < \frac{1}{2}(1 - \log a)$

$$\begin{aligned} \text{さて, } I &= \frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x+2b} dx = \frac{1}{ae^b} \left[ \log|x+2b| \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{ae^b} \{ \log(1+2b) - \log 2b \} = \frac{1}{ae^b} \log \frac{1+2b}{2b} \end{aligned}$$



まず,  $b$  の値を固定して,  $b = b_0$  ( $0 < b_0 < \frac{1}{2}$ ) とする。

$$I = \frac{1}{ae^{b_0}} \log \frac{1+2b_0}{2b_0}$$

$b = b_0$  と  $b = \frac{1}{2}(1 - \log a)$  のグラフの交点は,

$$b_0 = \frac{1}{2}(1 - \log a), \log a = 1 - 2b_0, a = e^{1-2b_0}$$

これより,  $a$  の値を  $1 < a = e^{1-2b_0}$  で変化させて,  $I$  の最小値を求める。

すると,  $\frac{1}{e^{b_0}} \log \frac{1+2b_0}{2b_0} > 0$  から,  $a$  の値が増加すると,  $I$  の値は単調減少すること

により,  $a = e^{1-2b_0}$  で  $I$  の値は最小となる。

$$\text{このとき, } I = \frac{1}{e^{1-2b_0} e^{b_0}} \log \frac{1+2b_0}{2b_0} = e^{b_0-1} \log \frac{1+2b_0}{2b_0} \dots\dots\dots (*)$$

次に,  $b_0$  を  $0 < b_0 < \frac{1}{2}$  で変化させて,  $I$  の最小値を求める。

ここで, (\*)より,  $g(x) = e^{x-1} \log \frac{1+2x}{2x}$  ( $0 < x < \frac{1}{2}$ ) とおくと,

$$g'(x) = e^{x-1} \log \frac{1+2x}{2x} + e^{x-1} \left( \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{2x} \right) = e^{x-1} \left\{ \log \frac{1+2x}{2x} - \frac{1}{x(1+2x)} \right\}$$

さらに,  $h(x) = \log \frac{1+2x}{2x} - \frac{1}{x(1+2x)}$  とおくと,

$$h'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{2x} + \frac{1+4x}{x^2(1+2x)^2} = \frac{-2x^2 + 3x + 1}{x^2(1+2x)^2}$$

$0 < x < \frac{1}{2}$  において,  $-2x^2 + 3x + 1 = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} > 0$  から,  $h'(x) > 0$  となり,

$h(x)$  は単調に増加する。

ここで、 $h\left(\frac{1}{2}\right) = \log 2 - 1 = \log 2 - \log e < 0$  より、 $0 < x < \frac{1}{2}$  において、

$$h(x) < 0, \quad g'(x) = e^{x-1}h(x) < 0$$

よって、 $g(x)$  は単調に減少し、 $x = \frac{1}{2}$  で最小値をとる。

以上より、 $I$  は  $b = \frac{1}{2}$ 、 $a = e^0 = 1$  のとき最小となり、最小値は、

$$I = \frac{1}{1 \times e^{\frac{1}{2}}} \log \frac{1+1}{2} = \frac{1}{\sqrt{e}} \log 2$$

### [ 解 説 ]

不等式で条件づけられた 2 変数関数の最大・最小問題です。グラフでの処理がストレートに行えないので、まず 1 文字の値を固定して最小値を求め、次にこの状態を保ったまま、いったん固定した文字の値を変化させるという 2 ステップで最小値を求めます。なお、(1)の不等式を、 $\frac{1}{ae^b(x+2b)} e^{-x-b}$  と変形し、この両辺を 0 から 1 まで積分しても、題意とは無関係なことに注意してください。

4

問題のページへ

- (1)  $A(0, a, 0)$ ,  $B(1, 0, b)$  を通る直線  $l$  上で,  $x=t$  である点  $P$  は, 線分  $AB$  を  $t:1-t$  に内分する点であるので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= (1-t)(0, a, 0) + t(1, 0, b)\end{aligned}$$

よって,  $P(t, a(1-t), bt)$  となる。

- (2) 図形  $M$  を平面  $x=t$  ( $0 < t < 1$ ) で切断した切り口は, 点  $P$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転して得られる円なので,

$$y^2 + z^2 = a^2(1-t)^2 + b^2t^2, \quad x=t$$

よって, 図形  $M$  の方程式は,

$$y^2 + z^2 = a^2(1-x)^2 + b^2x^2$$

$xy$  平面との交線は,  $z=0$  を代入して,

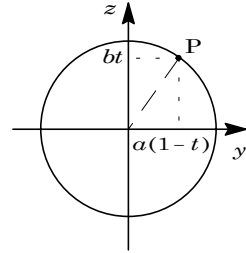
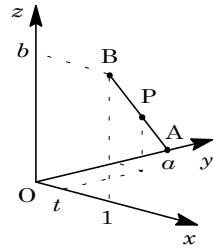
$$y^2 = a^2(1-x)^2 + b^2x^2, \quad z=0$$

- (3) 平面  $x=t$  ( $0 < t < 1$ ) で  $M$  を切断した断面積を  $S(t)$  とおくと,

$$S(t) = \pi \{ a^2(1-t)^2 + b^2t^2 \}$$

すると, 図形  $M$  と 2 つの平面  $x=0$  と  $x=1$  で囲まれた立体の体積  $V$  は,

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 S(t) dt = \int_0^1 \pi \{ a^2(1-t)^2 + b^2t^2 \} dt = \pi \left[ -\frac{a^2}{3}(1-t)^3 + \frac{b^2}{3}t^3 \right]_0^1 \\ &= \pi \left( \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right) = \frac{\pi}{3}(a^2 + b^2)\end{aligned}$$



### [ 解 説 ]

昨年の微分方程式に続き, 今年も, 普通に解くと範囲外としか思えない「代幾・基解」の頻出問題が出ました。北大も京大と同じように, 範囲外も出題すると宣言した方がスッキリすると思いますが。

5

問題のページへ

- (1) 部屋を移動する確率は  $\frac{1}{3}$ , 移動しない確率は  $\frac{2}{3}$  である。

まず, 条件より,  $P_A(0) = 1, P_B(0) = 0$  なので,

$$P_A(1) = \frac{2}{3}P_A(0) + \frac{1}{3}P_B(0) = \frac{2}{3}, \quad P_B(1) = \frac{1}{3}P_A(0) + \frac{2}{3}P_B(0) = \frac{1}{3}$$

$$P_A(2) = \frac{2}{3}P_A(1) + \frac{1}{3}P_B(1) = \frac{5}{9}, \quad P_B(2) = \frac{1}{3}P_A(1) + \frac{2}{3}P_B(1) = \frac{4}{9}$$

$$P_A(3) = \frac{2}{3}P_A(2) + \frac{1}{3}P_B(2) = \frac{14}{27}, \quad P_B(3) = \frac{1}{3}P_A(2) + \frac{2}{3}P_B(2) = \frac{13}{27}$$

すると, 第 3 試行の結果, 持ち点の期待値  $E(3)$  は,

$$E(3) = 1 + \left(1 \times \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{3}\right) + \left(1 \times \frac{5}{9} - 1 \times \frac{4}{9}\right) + \left(1 \times \frac{14}{27} - 1 \times \frac{13}{27}\right) = \frac{40}{27}$$

- (2) (1)と同様にして,

$$P_A(n+1) = \frac{2}{3}P_A(n) + \frac{1}{3}P_B(n), \quad P_B(n+1) = \frac{1}{3}P_A(n) + \frac{2}{3}P_B(n)$$

- (3) (2)より,  $P_A(n+1) + P_B(n+1) = P_A(n) + P_B(n)$  となり,

$$P_A(n) + P_B(n) = P_A(0) + P_B(0) = 1 \dots\dots\dots$$

また,  $P_A(n+1) - P_B(n+1) = \frac{1}{3}\{P_A(n) - P_B(n)\}$  より,

$$P_A(n) - P_B(n) = \{P_A(0) - P_B(0)\} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } P_A(n) = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}, \quad P_B(n) = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

- (4)  $k$  回目の試行の後, 持ち点の期待値は,

$$1 \times \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} - 1 \times \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

よって, 第  $n$  試行の結果, 持ち点の期待値  $E(n)$  は,

$$E(n) = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

### [ 解 説 ]

文系では(3)までの出題でしたが, 理系では(4)が追加されています。ところが, 定義だけで  $E(n)$  を求めるのは困難で, そのため「和の期待値は期待値の和」という考え方を利用しました。その結果, (1)の  $E(3)$  も解き直し, 文系とは解法が異なっています。しかし, これも数学 B の範囲外の領域にあるのですが。