1　解答解説のページへ

次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1,\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，i は虚数単位である。

(1)　z_2，z_3 を求めよ。

(2)　上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき，複素数 α を求めよ。

(3)　一般項 z_n を求めよ。

(4)　$z_n = -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

A を 2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし，$bc \neq 0$)，k を実数とする。行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式 $XA-AX=kA$ ……(＊)を考える。ただし，行列の成分は，すべて実数とする。

(1)　$k=0$ のとき，(＊)を満たす X は A の実数倍であることを示せ。

(2)　$k \neq 0$ のとき，(＊)を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2=O$ (ただし，O は零行列)であることを示せ。このとき，(＊)を満たす X で $z=c$ であるものを求めよ。

3

解答解説のページへ

a を 1 以上の実数, b を正の実数とする。

(1)　0 以上のすべての実数 x について，不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための, a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし, e は自然対数の底とする。

(2)　a，b が(1)で求めた範囲を動くとき，定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする a，b と，その最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a,\ b$ を正の実数とする。空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を l とする。直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする。

(1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 図形 M と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。

(4)　第 n 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。