1

問題のページへ

(1)　$a+b\omega=c+d\omega$ より，$(a-c)+(b-d)\omega=0$ ………①

$b-d\neq 0$ とすると，$\omega=-\dfrac{a-c}{b-d}$ ………②

②の左辺は虚数，また a, b, c, d が実数より右辺は実数となるので，②は不成立。

よって，$b-d=0$ となる。すると，①より $a-c=0$，すなわち $a=c$ かつ $b=d$ が成り立つ。

(2)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より $\omega^3=1$ となり，$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ かつ $\omega\neq 1$ から，

$\omega^2+\omega+1=0$ ………③

条件より，$s+t\omega=\omega(x+y\omega)=x\omega+y\omega^2$

③を用いると，$s+t\omega=x\omega+y(-\omega-1)=-y+(x-y)\omega$

(1)より，$s=-y$，$t=x-y$ となり，$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

よって，$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3)　ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2+A+E=O$ ………④

ここで④の両辺に左から $A-E$ をかけると，$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O$，$A^3=E$ ………⑤

すると，④⑤から $(A^2+E)^{3n}=(-A)^{3n}=\{(-A)^3\}^n=(-E)^n=(-1)^nE$

[解 説]

(1)は背理法を用いて証明するのが題意なのでしょうか。それとも，x と y が実数のとき $x+yi=0$ と $x=y=0$ が同値ということを利用するのでしょうか。とまどってしまいます。なお，(2)と(3)はともに有名問題です。

2

問題のページへ

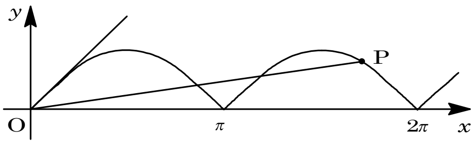
不等式 $\cos 2x + cx^2 \geqq 1$ ……①がすべての x について成り立つ条件は,

(i)　$x = 0$ のとき　①は $1 + c \times 0 \geqq 1$ となるので，任意の c で成立する。

(ii)　$x \neq 0$ のとき　①より，$c \geqq \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ ………②

ここで，$f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|^2$ は，$f(-x) = f(x)$ なので, $x>0$ としても一般性を失わない。

さて，曲線 $y = |\sin x|$ $(x>0)$ 上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ |\sin x|)$ とおくとき，$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ は直線 OP の傾きとなる。



ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$ となるので，$0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$

これより，$0 \leqq f(x) < 2$ となる。

よって，どんな x に対しても②が成立するのは，$c \geqq 2$ のときである。

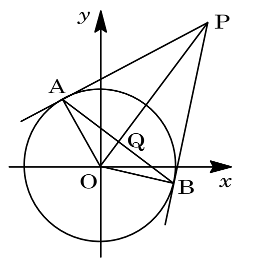
(i)(ii)より，求める c の範囲は $c \geqq 2$ である。

[解 説]

定数を分離したあと，分数関数のとる値の範囲を直線の傾きで考えるという有名なテクニックを用いました。

3

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$より，ABの中点Qは直線ABとOPの交点となり，しかも$\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$である。

すると，$\triangle\mathrm{OAQ}\backsim\triangle\mathrm{OPA}$より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$となるので,

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$より,

$$x=ka,\ \ y=kb\cdots\cdots\cdots②$$

①から，$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=1$，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=1\cdots\cdots\cdots③$

②を③に代入して，$k^2(a^2+b^2)=1$，$k>0$より$k=\dfrac{1}{a^2+b^2}$

②より，$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdots\cdots④$なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(2)　③④より，$a=(a^2+b^2)x=\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$b=(a^2+b^2)y=\frac{y}{x^2+y^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

条件より$\mathrm{P}(a,\ b)$が$(x-3)^2+y^2=1$上を動くので,

$$(a-3)^2+b^2=1\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥を⑦に代入して，$\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}-3\right)^2+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=1$

$$\{x-3(x^2+y^2)\}^2+y^2=(x^2+y^2)^2$$

$$x^2-6x(x^2+y^2)+8(x^2+y^2)^2+y^2=0$$

$x^2+y^2\neq0$より，$1-6x+8(x^2+y^2)=0$

よって，$x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$（この式は$x^2+y^2\neq0$を満たす）

以上より，点Qは円$x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$を描く。

[解 説]

本問もまた有名問題です。そして，①の式を導くには，経験が必要となります。

4

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^a \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx = \frac{1}{2}\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^a$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\Big[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Big]_0^a = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$ （$-1<a<1$ より）

(2) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx - \int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx$

ここで, (1)より，$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$

また，$\displaystyle\int_0^a \frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}dx = \int_0^a (1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})dx$

$\displaystyle = \Big[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big]_0^a$

$\displaystyle = a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$

よって，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3) (i)　$0\leqq a<1$ のとき　$0\leqq x\leqq a$ において，$\displaystyle 0\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_0^a = \frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$のとき, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(ii)　$-1<a<0$ のとき　$a\leqq x\leqq 0$ において，$\displaystyle 0\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \leqq \int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-a^2}dx = \frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_a^0 = -\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって, $n\to\infty$のとき, $\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = -\int_a^0 \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

(i)(ii)より，$-1<a<1$ のとき, $n\to\infty$とすると，$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx \to 0$

すると, (2)より，$\displaystyle\log\frac{1+a}{1-a} - 2\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx = 2\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$ なので,

$$\log\frac{1+a}{1-a} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

[解 説]

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

5

問題のページへ

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝するのは，勝者が順に，AA または BCAA の場合なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(2)　A，B，C の誰も 2 連勝せずに n 回目が終了するのは，ACBACBACB……または BCABCABCA……の場合なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって, n 回以内の勝負で, A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率は,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

[解 説]

有名な巴戦の問題です。なお，文系に 100 回目を 4 回目に変更した問題が出ています。