1

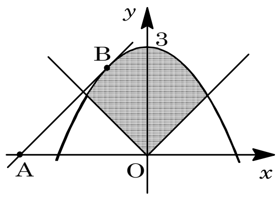
問題のページへ

(1)　$y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ ……①を連立して，$y=-\dfrac{1}{2}y^2+3$，$y^2+2y-6=0$

$y \geqq 0$ より $y=-1+\sqrt{7}$ となり，このとき $x=\pm(-1+\sqrt{7})$

よって, 2 交点 $\left(\pm(-1+\sqrt{7}),\ -1+\sqrt{7}\right)$ となる。

これより，不等式 $|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$ の表す領域 D は，



右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　点 A$\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線は，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ………②

①②が接する条件は，$-\dfrac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$，$x^2+2mx+7m-6=0$ ………③

$D/4=m^2-(7m-6)=0$，$m=1,\ 6$

ここで，接点の x 座標は③より $x=-m$ となるので，$m=1$ である。

このとき，B$\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ となり，$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-1+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

さて，直線 AB と直線 $y=x$ は平行なので，点 P が $y=x$ 上にあるとき，△ABP の面積は最大となる。

直線 AB と直線 $y=x$ との距離は，$\dfrac{7}{2}\cos 45^\circ=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，△ABP の面積の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{35}{8}$ である。

(3)　$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}=k$ とおくと，$y=k\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ……④となり，点 A を通り傾き k の直線を表す。すると，k のとる範囲は，④と領域 D が共有点をもつ条件より求まるので，(2) から $0 \leqq k \leqq 1$ となる。

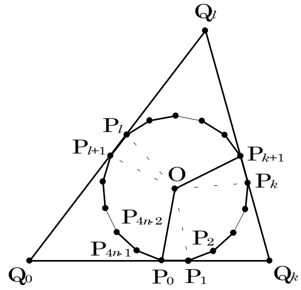
[解 説]

(2)が(3)の誘導となっており, (3)では計算の必要がありません。

2

問題のページへ

(1)　正 $4n$ 角形の中心を O とし，$\theta=\dfrac{2\pi}{4n}=\dfrac{\pi}{2n}$ とおく。



四角形 $\mathrm{OP_0Q_kP_{k+1}}$ について，$\angle\mathrm{P_0OP_{k+1}}=(k+1)\theta$，

$\angle\mathrm{OP_0Q_k}=\angle\mathrm{OP_{k+1}Q_k}=\dfrac{\pi-\theta}{2}$ より，

$$\angle\mathrm{P_0Q_kP_{k+1}}=2\pi-\frac{\pi-\theta}{2}\cdot 2-(k+1)\theta$$

$$=\pi-k\theta=\left(1-\frac{k}{2n}\right)\pi$$

(2)　(1)と同様に考えて，

$$\angle\mathrm{P_kQ_lP_{l+1}}=\pi-(l-k)\theta=\left(1-\frac{l-k}{2n}\right)\pi$$

$$\angle\mathrm{P_lQ_0P_1}=\pi-(4n-l)\theta=\left(1-\frac{4n-l}{2n}\right)\pi$$

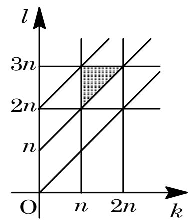
$\triangle\mathrm{Q_0Q_kQ_l}$ が鋭角三角形なので，$0<\angle\mathrm{P_0Q_kP_{k+1}}<\dfrac{\pi}{2}$ より，

$0<\left(1-\dfrac{k}{2n}\right)\pi<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{k}{2n}<1$，$n<k<2n$ ………①

同様にして，$0<\angle\mathrm{P_kQ_lP_{l+1}}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$n<l-k<2n$，$k+n<l<k+2n$ ………②

また，$0<\angle\mathrm{P_lQ_0P_1}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$n<4n-l<2n$，$2n<l<3n$ ………③

①②③を $k<l$ のもとで kl 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



この領域内にある格子点 $(k,\ l)$ の個数が，鋭角三角形ができる k と l の組の数に一致するので，

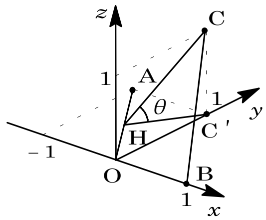
$$(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+2+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

[解 説]

条件を満たす k と l の組の個数を，格子点の個数に対応させて数えました。今年の 5 題のなかでは，一番おもしろい問題でした。

3

問題のページへ



(1)　点 H は，直線 OA 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-k,\ k,\ 0)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(-k,\ k-1,\ -1)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ なので，

$$-k\cdot(-1)+(k-1)\cdot 1-1\cdot 0=0,\ k=\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ から，$\mathrm{H}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$

ここで，$\mathrm{CH}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$\mathrm{C'H}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle\mathrm{CC'H}=\frac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta=\frac{\mathrm{C'H}}{\mathrm{CH}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　直線 OA 上の点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-t,\ t,\ 0)$

直線 BC 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-s,\ s,\ s)$

そこで，$\overline{\mathrm{PQ}}$ が最小となるのは，$\mathrm{PQ}\perp\mathrm{OA}$ かつ $\mathrm{PQ}\perp\mathrm{BC}$ ときなので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s+t,\ s-t,\ s)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から，$-(1-s+t)+(s-t)=0$，$2s-2t=1$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から，$-(1-s+t)+(s-t)+s=0$，$3s-2t=1$ ………②

①②より，$s=0,\ t=-\frac{1}{2}$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1,\ 0,\ 0)$ となるので，求める点 P，Q の座標は，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0,\ 0)$ である。

[解　説]

(2)では，ねじれの位置にある 2 直線 OA と BC の共通垂線を利用して，PQ の距離が最小になる点 P, Q の座標を求めました。

4

問題のページへ

(1)　$Ae^x - x = 0$ より，$A = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$

ここで，$g(x) = xe^{-x}$ とおくと，

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$A = g(x)$ が，$0 < x < 3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつ条件は，右表より，$\dfrac{3}{e^3} < A < \dfrac{1}{e}$ となる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$\dfrac{3}{e^3}$

(2)　まず，$(e^t\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t$ ………①

$(e^t\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t$ ………②

①＋②より，$2e^t\cos t = (e^t\cos t + e^t\sin t)'$，$e^t\cos t = \dfrac{1}{2}\left\{e^t(\cos t + \sin t)\right\}'$

すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\Big[e^t(\cos t + \sin t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

(3)　$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = c$ とおくと，条件より，$\log f(x) = x - 3 + c$

$f(x) = e^{x-3+c} = e^{c-3}\cdot e^x$

すると(2)より，$c = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c-3}\cdot e^t\cos t\,dt = 2e^{c-3}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = e^c\cdot\frac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

ここで，$A = \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ とおくと，$c = Ae^c$，$Ae^c - c = 0$ ………③

さて，$A - \dfrac{3}{e^3} = \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 4\right) > \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{3}{2}} - 4\right) = \dfrac{1}{e^3}\cdot\dfrac{e^3 - 16}{e^{\frac{3}{2}} + 4} > 0$

また，$\dfrac{1}{e} - A = \dfrac{1}{e^3}\left(e^2 - e^{\frac{\pi}{2}} + 4\right) > 0$

よって，$\dfrac{3}{e^3} < A < \dfrac{1}{e}$ となり，(1)より③は $0 < c < 3$ に異なる 2 つの解をもつので，$f(x)$ は 2 つ存在し，ともに条件 $f(0) = e^{c-3} < e^0 = 1$ を満たしている。

以上より，与えられた条件を満たす $f(x)$ は 2 つ存在する。

[解　説]

(1)と(2)は無関係で，その両方が(3)の誘導となっている形式の問題です。なお，(3)で，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = c$ と最初は置きましたが，(1)との関連を考え，置き換えを上のように変更しました。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=1$ より $d=1$……①，$f'(0)=2$ より $c=2$……②

$f(t)=p$，$f'(t)=q$ よりそれぞれ，$at^3+bt^2+ct+d=p$，$3at^2+2bt+c=q$

①②を代入すると，

$at^3+bt^2=p-2t-1$……③，$3at^2+2bt=q-2$……④

④×t−③×2 より，$at^3=-2p+tq+2t+2$，$a=\dfrac{-2p+tq+2t+2}{t^3}$

③に代入して，$bt^2=3p-tq-4t-3$，$b=\dfrac{3p-tq-4t-3}{t^2}$

(2)　$a\leqq 0,\ t>0$ より，(1)から $-2p+tq+2t+2\leqq 0$，$q\leqq\dfrac{2}{t}p-\dfrac{2t+2}{t}$………⑤

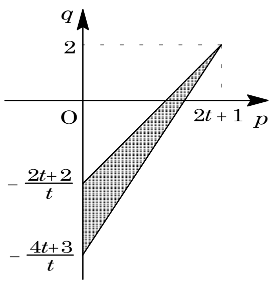
$b\leqq 0,\ t>0$ より，(1)から $3p-tq-4t-3\leqq 0$，$q\geqq\dfrac{3}{t}p-\dfrac{4t+3}{t}$………⑥

ここで，⑤と⑥の境界線どうしの交点は，

$\dfrac{2}{t}p-\dfrac{2t+2}{t}=\dfrac{3}{t}p-\dfrac{4t+3}{t}$，$2p-2t-2=3p-4t-3$，$p=2t+1$

また，$q=\dfrac{2}{t}(2t+1)-\dfrac{2t+2}{t}=\dfrac{2t}{t}=2$ より，交点 $(2t+1,\ 2)$

⑤⑥と $p\geqq 0$ とを合わせて，点 $(p,\ q)$ の存在領域を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。



また，この領域の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{2t+2}{t}+\frac{4t+3}{t}\right)(2t+1)=\frac{(2t+1)^2}{2t}$$

(3)　相加平均と相乗平均の関係を用いると，(2)より，

$$S=\frac{(2t+1)^2}{2t}=\frac{4t^2+4t+1}{2t}=2t+\frac{1}{2t}+2\ \geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}+2=4$$

なお，等号は $2t=\dfrac{1}{2t}$，すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき成立する。

したがって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき S は最小値 4 をとる。

[解　説]

正確な計算がすべてという問題です。(3)は微分するまでもありませんでした。