1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　10^{10} を 2020 で割った余りを求めよ。

(2)　100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるもののうち, 2020 で割り切れるものの個数を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を定数とし，$0 \leqq \theta < \pi$ とする。方程式 $\tan 2\theta + a\tan\theta = 0$ を満たす θ の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

半径 1 の円周上に 3 点 A, B, C がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$x>0$ に対し，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|\,dt$ と定める。$F(x)$ の最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

n を正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ, 表が出れば 1 点, 裏が出れば 2 点を得る。この試行を繰り返し, 点の合計が n 以上になったらやめる。点の合計がちょうど n になる確率を p_n で表す。

(1) p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。

(2) $|p_{n+1}-p_n|<0.01$ を満たす最小の n を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　以下，$\bmod 2020$ で記述すると，$2\times10^3\equiv-20$ より，

$$10^4\equiv5\times(-20)\equiv-10^2,\ 10^8\equiv(-10^2)\times(-10^2)\equiv10^4\equiv-10^2$$

$$10^{10}\equiv10^2\times(-10^2)\equiv-10^4\equiv10^2$$

よって，10^{10} を 2020 で割った余りは $10^2=100$ である。

(2)　まず，自然数 n に対して，$10^{4n}\equiv-10^2$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　(1)より，$10^4\equiv-10^2$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$10^{4k}\equiv-10^2$ と仮定すると，

$$10^{4(k+1)}\equiv-10^2\times10^4\equiv-10^2\times(-10^2)\equiv10^4\equiv-10^2$$

よって，$n=k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$10^{4n}\equiv-10^2$ である。

これより，自然数 n に対して，$10^{4n+1}\equiv-10^2\times10\equiv-10^3$

$$10^{4n+2}\equiv-10^3\times10\equiv-10^4\equiv10^2,\ 10^{4n+3}\equiv10^2\times10\equiv10^3$$

なお，$-10^2\equiv1920$，$-10^3\equiv1020$ なので，余りはすべて異なる。

また，$n=0$ に対しては，$10^0\equiv1$，$10^1\equiv10$，$10^2\equiv10^2$，$10^3\equiv10^3$ である。

さて，100 桁の正の整数で各位の数の和が 2 となるものを x とおくと，

(i)　$x=2\times10^{99}$ のとき

$99=4\times24+3$ より，$2\times10^{99}\equiv2\times10^3\equiv2000$ となり，2020 で割り切れない。

(ii)　$x=10^{99}+10^l$ $(l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 98)$ のとき

$x\equiv0$ の条件は，$10^l=x-10^{99}\equiv0-10^3\equiv-10^3$

すなわち，$l=4n+1$ $(n\geqq1)$ のときより，$l=5,\ 9,\ \cdots,\ 97$ $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 24)$ となり，2020 で割り切れる整数 x は 24 個となる。

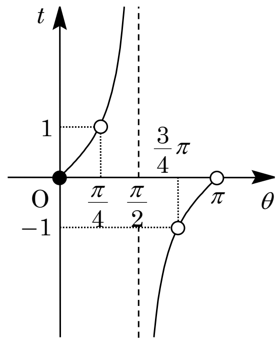
(i)(ii)より，求める 2020 で割り切れる整数 x の個数は 24 である。

［解　説］

剰余に注目した整数問題です。(1)のプロセスが(2)の誘導になっています。

2

問題のページへ



$0\leqq\theta<\pi$ のとき，方程式 $\tan 2\theta+a\tan\theta=0$ ……①に対し，

$t=\tan\theta$ とおくと，

$$\frac{2t}{1-t^2}+at=0$$

これより，$2t+at(1-t^2)=0$ となり，

$$t\{2+a(1-t^2)\}=0\quad(t\neq\pm1)\text{ ………②}$$

(i)　$t=0$ のとき　①の解は $\theta=0$ となる。

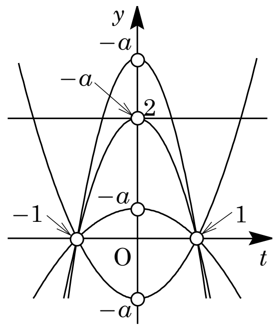
(ii)　$t\neq0$ のとき　②より，$2+a(1-t^2)=0$ ………③

③より $a(t^2-1)=2$ と変形し，

$$y=a(t^2-1)\text{ ………④},\ \ y=2\text{ ………⑤}$$

④⑤のグラフの共有点 $(t\neq0,\ \pm1)$ の個数を調べると，

- $-a<0\ (a>0)$ のとき 2 個
- $0\leqq-a\leqq2\ (-2\leqq a\leqq0)$ のとき 0 個
- $-a>2\ (a<-2)$ のとき 2 個



(i)(ii)より，②の解の個数は，

$-2\leqq a\leqq0$ のとき 1 個，$a<-2$，$0<a$ のとき 3 個

よって，$0\leqq\theta<\pi\left(\theta\neq\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi\right)$ における①の解 θ の個数は，

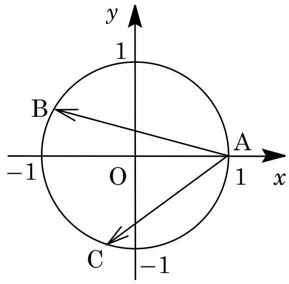
$-2\leqq a\leqq0$ のとき 1 個，$a<-2$，$0<a$ のとき 3 個

［解　説］

三角方程式の解の個数の問題です。いろいろな解法が考えられますが，ここではビジュアルなタイプで記しました。なお，最後の t と θ の対応は 1 対 1 ですので，ややこしくありません。

3

問題のページへ



半径 1 の円周上の 3 点 A, B, C に対して，明らかに $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は正，最小値は負なので，$A \neq B$，$A \neq C$ のときを考える。

さて，$A(1,\ 0)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$C(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおき，$0 < \theta < 2\pi$，$\pi \leqq \varphi < 2\pi$ としても一般性を失わない。

$\overrightarrow{AB} = (\cos\theta - 1,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{AC} = (\cos\varphi - 1,\ \sin\varphi)$ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= (\cos\theta - 1)(\cos\varphi - 1) + \sin\theta\sin\varphi \\ &= \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi - \cos\theta - \cos\varphi + 1 \\ &= \cos(\varphi - \theta) - \cos\varphi - \cos\theta + 1 = -2\sin\frac{2\varphi - \theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta + 1 \\ &= 2\sin\frac{2\varphi - \theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta + 1\end{aligned}$$

ここで，θ を $0 < \theta < 2\pi$ で固定し，$\sin\frac{\theta}{2} > 0$ に注意すると，$0 < \frac{2\varphi - \theta}{2} < 2\pi$ から，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ は $\frac{2\varphi - \theta}{2} = \frac{\pi}{2}\ \left(\varphi = \frac{\theta + \pi}{2}\right)$ のとき最大値 $M = 2\sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta + 1$ ……①，そして $\frac{2\varphi - \theta}{2} = \frac{3}{2}\pi\ \left(\varphi = \frac{\theta + 3\pi}{2}\right)$ のとき最小値 $m = -2\sin\frac{\theta}{2} - \cos\theta + 1$ ……②をとる。

そこで，θ を $0 < \theta < 2\pi$ で動かすと，①②より，

$$M = 2\sin\frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 1 = 2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2} = 2\left(\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$m = -2\sin\frac{\theta}{2} - \left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + 1 = 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin\frac{\theta}{2} = 2\left(\sin\frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

したがって，$0 < \sin\frac{\theta}{2} \leqq 1$ から，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最大値は，$\sin\frac{\theta}{2} = 1$ のとき 4 となり，このとき $(\theta,\ \varphi) = (\pi,\ \pi)$ である。また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ の最小値は，$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ のとき $-\frac{1}{2}$ となり，このとき $(\theta,\ \varphi) = \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi\right)$ である。

［解 説］

内積を題材とした最大・最小問題です。最大値については，図形的にほぼ明らかです。ただ，最小値も問われているので，成分表示をして 1 文字固定の方法を利用して解いています。

4

問題のページへ

$x>0$ に対し，$F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt$ とするとき，

(i)　$x<2-x$ $(0<x<1)$ のとき

$$xF(x)=\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt=\int_{2-x}^{2+x}(t-x)dt=\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{2-x}^{2+x}$$
$$=\frac{1}{2}\{(2+x)^2-(2-x)^2\}-x\cdot 2x=4x-2x^2$$

よって，$F(x)=4-2x$ ……①となり，この区間で単調に減少する。

(ii)　$2-x\leqq x$ $(x\geqq 1)$ のとき

$$xF(x)=\int_{2-x}^{2+x}|t-x|dt=\int_{2-x}^{x}-(t-x)dt+\int_{x}^{2+x}(t-x)dt$$
$$=-\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{2-x}^{x}+\Big[\frac{t^2}{2}-xt\Big]_{x}^{2+x}$$
$$=-\frac{1}{2}\{x^2-(2-x)^2\}+x(2x-2)+\frac{1}{2}\{(2+x)^2-x^2\}-x\cdot 2$$
$$=-\frac{1}{2}(-4+4x)+2x^2-2x+\frac{1}{2}(4+4x)-2x=2x^2-4x+4$$

よって，$F(x)=2x+\dfrac{4}{x}-4$ ……②となり，相加平均と相乗平均の関係より，

$$2x+\frac{4}{x}-4\geqq 2\sqrt{2x\cdot\frac{4}{x}}-4=4\sqrt{2}-4$$

等号が成立するのは $2x=\dfrac{4}{x}$ $(x=\sqrt{2})$ のときであり，$x\geqq 1$ を満たしている。

(i)(ii)より，①②は $x=1$ で連続なので，$F(x)$ の最小値は $F(\sqrt{2})=4\sqrt{2}-4$ である。

［解　説］

定積分の計算問題です。被積分関数の絶対値をはずす際の場合分けがポイントです。

5

問題のページへ

(1)　1 枚の硬貨を投げ，表が出れば 1 点，裏が出れば 2 点を得る試行を繰り返し，点の合計が n になる確率を p_n とする。

点の合計が 1 点になるのは，1 回投げ表が出るときより，$p_1=\dfrac{1}{2}$ である。

点の合計が 2 点になるのは，1 回投げ裏が出るとき，または 2 回投げ表→表のときより，$p_2=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$ である。

点の合計が 3 点になるのは，2 回投げ表→裏，裏→表のとき，または 3 回投げ表→表→表のときより，$p_3=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{8}$ である。

点の合計が 4 点になるのは，2 回投げ裏→裏のとき，または 3 回投げ表→表→裏，表→裏→表，裏→表→表のとき，または 4 回投げ表→表→表→表のときより，$p_4=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{11}{16}$ である。

(2)　点の合計が $n+2$ 点になるのは，1 回目に表が出た後に 2 回目からの点の合計が $n+1$ 点になるとき，または 1 回目に裏が出た後に 2 回目からの点の合計が n 点になるときより，

$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$$

すると，$p_{n+2}-p_{n+1}=\dfrac{1}{2}p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n-p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$ となり，(1)より，

$$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ここで，条件より，$|p_{n+1}-p_n|<0.01$ なので，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{1}{100},\ 2^{n+1}>100,\ 2^n>50$$

そこで，$2^5=32$，$2^6=64$ に注意すると，求める最小の n は 6 となる。

［解 説］

確率と漸化式の典型的な問題です。(1)はストレートに計算しましたが，p_3 と p_4 は(2)の漸化式を先に導き，それを利用するという手もあります。