1

問題のページへ

(1)　$AX = XA$ より，$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

よって，$c = b$，$d = a$

(2)　条件より，$AB = BA = C$ ……①，$BC = CB = A$ ……②

まず，①より $BC = BAB$，$CB = BAB$ となり，②の $BC = CB$ は成立する。

また，①の $AB = BA$ と(1)の結果から，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とおける。

このとき，①から $C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}$

さらに，②から $BC = A$ なので，$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$ab = 0$ ……③，$a^2 + b^2 = 1$ ……④

③④より，$(a,\ b) = (0,\ \pm 1)$，$(\pm 1,\ 0)$

以上より，複号同順として，$B = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ または

$B = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$，$C = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

[解　説]

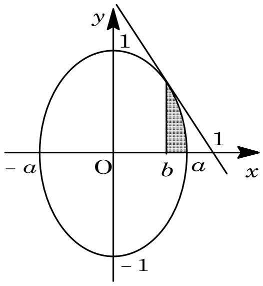
(2)では，成分を用いて普通に計算をしました。①と②には 4 つの等式が入っていますが，これを①の第 1 式，②の第 1 式，①の第 2 式，②の第 2 式という順で一つずつ考えていきました。

2

問題のページへ

(1)　接点を$(b,\ c)$とするとき，接線は$\dfrac{b}{a^2}x+cy=1$

点$(1,\ 0)$を通ることより，$\dfrac{b}{a^2}=1$から，$b=a^2$



(2)　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$はx軸対称なので，右図の網点部をx軸のまわりに1回転してできる立体の体積がVとなる。

ここで，$y^2=1-\dfrac{x^2}{a^2}$から，

$$V=\int_{a^2}^{a}\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\left[\ x-\frac{x^3}{3a^2}\ \right]_{a^2}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{3}(a^4-3a^2+2a)$$

(3)　$f(a)=a^4-3a^2+2a$とおくと，

$$f'(a)=4a^3-6a+2$$
$$=2(a-1)(2a^2+2a-1)$$

$f'(a)=0$の解は，$a=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗		↘	

右表より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$のとき，$f(a)$は最大となる。

ここで，$f(a)=(2a^2+2a-1)\left(\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}\right)+3a-\dfrac{3}{4}$より，

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}$$

よって, Vは最大値$\dfrac{\pi}{3}\cdot f\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{4}\pi$をとる。

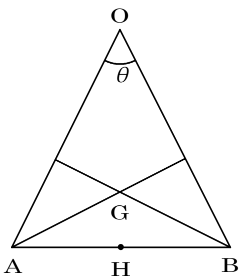
[解　説]

(3)の極大値を求める計算がポイントとなります。ここでは，整式の除法に関する等式を用いました。これは複雑な数値計算を回避する必修技法の一つです。

3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$



$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{b}=0$ より，$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s\cos\theta+t=\cos\theta$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\vec{a}=0$ より，$s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s+t\cos\theta=\cos\theta$ ………②

①②より，$\cos\theta\neq\pm1$ なので，$s=t=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}$

(2)　点 G が三角形 OAB の外部または周上にある条件は，$s\leqq 0$ または $t\leqq 0$ または $s+t\geqq 1$ である。

(1)から，$\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\leqq 0$……③，または $\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}\geqq 1$……④

③より $\cos\theta\leqq 0$ となり，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

④より $2\cos\theta\geqq\cos\theta+1$ となり，$\cos\theta\geqq 1$ から不成立。

以上より，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}(\vec{a}+\vec{b})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\left|\dfrac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}\right||\vec{a}+\vec{b}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$$

よって，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\left|\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}\right|=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=-1+\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

ここで $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ より，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので，$\dfrac{1}{2}\leqq 1+\cos\theta\leqq\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$$7-4\sqrt{3}\leqq -1+\dfrac{2}{1+\cos\theta}\leqq 3$$

以上より，$7-4\sqrt{3}\leqq\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}\leqq 3$

[解 説]

(3)では(2)の結果を用いて，点 G が△OAB の内部にあるときと外部または周上にあるときに場合分けをしてもよいのですが，解が長くなるだけです。もっとも，最初はそうしたのですが。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　接線$l: y = mx + n$とおくと，条件より，

$$x^3 - kx - (mx + n) = (x - a)^2(x - b)$$

x^2の係数を比べて，$0 = -b - 2a$，$b = -2a$

なお$b \neq a$より，$a \neq 0$

(2)　$y = x^3 - kx$より，$y' = 3x^2 - k$

$x = a$のとき$y' = 3a^2 - k$，また$x = b = -2a$のとき$y' = 12a^2 - k$

条件より，$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　①において，$a^2 = t$とおくと，$t>0$で，

$$36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を満たす a が存在する条件は，②の解の少なくとも 1 つが $t>0$ であることに等しい。

ここで，$y = 36t^2 - 15kt + k^2 + 1$のグラフの軸は$t = \dfrac{5}{24}k$であり，$y$ 軸との交点は$y = k^2 + 1 > 0$から，求める条件は，②の判別式$D \geqq 0$かつ軸$t = \dfrac{5}{24}k$が正である。

$$D = (15k)^2 - 4\cdot 36(k^2 + 1) \geqq 0 \cdots\cdots ③,\ \frac{5}{24}k > 0 \cdots\cdots ④$$

④より $k>0$，③より $9k^2 - 16 \geqq 0$

よって，$k \geqq \dfrac{4}{3}$

[解 説]

本問はいかにも文系風ですが，文理共通問題ではなく，理系で単独に出題されたものです。

5

問題のページへ

(1)　二項定理より, $a>0$ なので,

$$(a+1)^n \geqq a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} = a^n + na^{n-1} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①において，$a=n$ とおくと,

$$(n+1)^n \geqq n^n + n\cdot n^{n-1} = 2n^n \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$n!\leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n \cdots\cdots$③が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

③の左辺$=1!=1$，③の右辺$=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ となり，$n=1$ のとき③は成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき

$k!\leqq 2\left(\dfrac{k}{2}\right)^k \cdots\cdots$④が成り立つと仮定する。

④の両辺に$(k+1)$をかけて

$$(k+1)!\leqq 2(k+1)\left(\frac{k}{2}\right)^k = \frac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k$$

②より，$\dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k \leqq \dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot\dfrac{(k+1)^k}{2} = 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$

よって，$(k+1)!\leqq 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，③が成り立つ。

[解　説]

②式は，誘導を細かくするために後から入れたような不等式です。それとも，いきなり②式では難しいので，①式を②式の誘導として追加したのでしょうか。

6

問題のページへ

(1)　得点を X とすると，$0 \leqq X \leqq n-1$ となる。

まず，$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき $X=k$ となるのは，2 つの数の差の絶対値が k なので，$(1,\ k+1)$，$(2,\ k+2)$，……，$(n-k,\ n)$ の場合である。このとき，引く順序を考えると $2(n-k)$ 通りある。

$X=k$ となる確率を P_k とすると，$P_k=\dfrac{2(n-k)}{n^2}$　$(1 \leqq k \leqq n-1)$

また，$X=0$ となるのは，$(1,\ 1)$，$(2,\ 2)$，……，$(n,\ n)$ の場合で，その確率を P_0 とすると，$P_0=\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$

題意の試行を 1 回行うときの得点の期待値 $E(X)$ は，

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n-1}kP_k=\sum_{k=1}^{n-1}kP_k=\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)$$
$$=\frac{2}{n^2}\left\{n\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}$$
$$=\frac{(n-1)(n+1)}{3n}$$

(2)　$n=3$ のとき，題意の試行を 1 回行うときの確率は，(1) より，

$$P_0=\frac{3}{9},\quad P_1=\frac{2(3-1)}{3^2}=\frac{4}{9},\quad P_2=\frac{2(3-2)}{3^2}=\frac{2}{9}$$

得点	0	1	2
確率	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

3 回の試行の後，得点の合計が 2 となるのは，得点が $(0,\ 0,\ 2)$，$(0,\ 1,\ 1)$ の場合であり，その確率は試行の順序を考えて，

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{9}\right)^2\frac{2}{9}+{}_3\mathrm{C}_1\frac{3}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{3\cdot3^2\cdot2+3\cdot3\cdot4^2}{9^3}=\frac{22}{81}$$

[解　説]

確率と期待値に関する頻出問題です。毎年，題意が同じ問題に出会っているような気がします。