1

問題のページへ

(1) ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2+A+\left(\frac{1}{4}+x^2\right)E=O,\ \ A^2=-A-\left(\frac{1}{4}+x^2\right)E\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より, $(E+A+A^2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\cdots\cdots\cdots②$

①を②に代入して, $\left\{1-\left(\frac{1}{4}+x^2\right)\right\}E\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\left(\frac{3}{4}-x^2\right)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

よって, $\frac{3}{4}-x^2=0$, $x\geqq 0$ より $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) (1)より, $A^2=-A-E$

$$A^3=A\cdot A^2=A(-A-E)=-A^2-A=-(-A-E)-A=E$$

(3) (2)より, n を自然数として, $A^{3n}=E$

(i) $n=3k+1$ $(k\geqq 0)$ のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+2}+A^{3k+1}+E=A^2+A+E=O$$

(ii) $n=3k+2$ $(k\geqq 0)$ のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+4}+A^{3k+2}+E=A+A^2+E=O$$

(iii) $n=3k+3$ $(k\geqq 0)$ のとき

$$A^{2n}+A^n+E=A^{6k+6}+A^{3k+3}+E=E+E+E=3E$$

以上より, n が 3 の倍数のとき $3E$, n が 3 の倍数でないとき O となる。

[解 説]

(2)は, $A^2+A+E=O$ から両辺に $A-E$ をかけて, $A^3-E=O$, $A^3=E$ とする解法もあります。複素数の「ω の問題」と同じ構図です。

2

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}=(0,\ \sqrt{5}-1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}=\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$より，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_3}}=0$

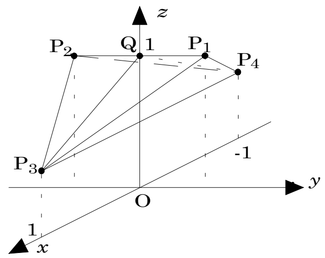
また，$\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}=\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$より，$\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP_4}}=0$

(2)　$l=\mathrm{QP_3}=\mathrm{QP_4}$とおくと，

$$l^2=1+\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{4}=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{l}$$

$$=2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$$



(3)　(1)より，$\mathrm{P_1P_2}$は平面$\mathrm{QP_3P_4}$に垂直である。

また(2)より，$\triangle\mathrm{QP_3P_4}=\dfrac{1}{2}l^2\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

四面体$\mathrm{P_1P_2P_3P_4}$の体積をVとすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{QP_3P_4}\cdot\mathrm{P_1P_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}-4)$$

[解 説]

一見、複雑そうでますが，図形に対称性があるので，見かけほどではありません。(2)では，内積を利用して$\cos\theta$，さらに$\sin\theta$を求める解もありますが，少々計算が複雑です。

3

問題のページへ

(1)　$g(t)=\log\left(\left|t-\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}\right)$とおくと,

$$f'(x)=g(x+1)(x+1)'-g(x)=\log\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)-\log\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)$$

$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$より, $x+\dfrac{1}{2}>0$, $x-\dfrac{1}{2}<0$となるので,

$$f'(x)=\log\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\log\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\log(x+1)-\log(-x+1)$$

(2)　$f'(x)=0$の解は, $x+1=-x+1$より$x=0$

$x=0$のとき, $f(x)$は最小値をとるので,

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$a=0$となる。最小値は,

$$f(0)=\int_0^1\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt$$

ここで, $-t+1=s$とおくと, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1\log s\,ds$

よって, $\displaystyle f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt=2\Big[t\log t-t\Big]_{\frac{1}{2}}^1=2\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\log 2-1$

(3)　$\displaystyle I=\int_0^1 t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\log t\,dt$

ここで, $-t+1=s$とおくと,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}(1-s)\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)\log s\,ds$$

よって, $\displaystyle I=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)\log t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\log t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt=\frac{1}{2}(\log 2-1)$

[解 説]

(3)の積分は, (2)の$f(0)$の値を使うらしいということが, 問題文から匂ってきます。実際, そのとおりになりました。

4

問題のページへ

(1)　$x=\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}+\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$y=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{2}-\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$，$c=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$d=1$，$A=\dfrac{\pi}{3}$

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{12}\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{7}{6}\pi$ となる。

(1)より，曲線 C は中心$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，半径 1 の円弧で，中心角は$\dfrac{7}{6}\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{5}{6}\pi$ より，その長さは，$1\cdot\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$ となる。

[解 説]

(1)に cos での合成が出ました。今年のセンター試験にも出て，出来が悪かったところです。なお，(2)の弧長を求めるのに，積分を利用してももちろん構いません。しかし，これは「やりすぎ」というものです。

5

問題のページへ

(1)　$f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$，$f_n{}'(x)=n(p_ne^{nx}-q_ne^{-nx})$

条件より，$f_n(0)=p_n+q_n=1$………①

$f_n{}'(1)=n(p_ne^{n}-q_ne^{-n})=-n$ より，$e^np_n-\dfrac{1}{e^n}q_n=-1$………②

①②より，$\left(e^n+\dfrac{1}{e^n}\right)p_n=-1+\dfrac{1}{e^n}$，$p_n=\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}$

①から，$q_n=1-\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}=\dfrac{e^n(1+e^n)}{1+e^{2n}}$

また，$n\geqq1$ より $e^n>1$ となり，$p_n<0$，$q_n>0$

よって，$f_n{}'(x)<0$

(2)　$f_n(x)=0$ より，$\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}e^{nx}+\dfrac{e^n(1+e^n)}{1+e^{2n}}e^{-nx}=0$

$$(1-e^n)e^{2nx}+e^n(1+e^n)=0,\quad e^{2nx}=\frac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$$

$x=\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$ より，$z_n=\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$

(3)　$$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log\frac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\log e^n+\log\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log e+\frac{1}{2n}\log\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)=\frac{1}{2}$$

[解 説]

昨年度の調子で，もう「ひとひねり」あると思って解くと，肩すかしをくらってしまいます。たとえば，(1)の $f_n{}'(x)<0$ を示すのに，$f_n{}''(x)$ を計算して $f_n{}'(x)$ の増減を調べようとすると，たいへんなことになります。また(3)についても同様です。このように，素直に考えれば素直に解けるという問題です。

6

問題のページへ

(1)　$E=3\cdot\frac{1}{3}x-6\cdot\frac{1}{3}x-3\cdot\frac{1}{3}y+5\cdot\frac{1}{3}y+6\cdot\frac{1}{3}z-5\cdot\frac{1}{3}z$

$=-x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z=-x+\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}(1-x-y)=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}y$

ここで，$y=k$　$(0\leqq k\leqq 1)$ と固定すると，$E=-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}k+\frac{1}{3}$

すると，x の増加に伴って E は減少するので，$0\leqq x\leqq 1-k$ から，どんな k に対しても $x=0$ のとき，E は最大となる。

この $x=0$ の状態を保ったまま y を変化させると，$E=\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}$ より，y の増加に伴って E は増加する。よって，$y=1$ のとき E は最大となる。

このとき，$z=1-x-y=0$ となり，E は $(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)$ において最大値 $\frac{2}{3}$ をとる。

(2)　$E=-3yp+6zp+3xq-5zq-6xr+5yr$

$=(-3y+6z)p+(3x-5z)q+(-6x+5y)r$

$p,\ q,\ r$ をどのようにとっても $E=0$ となる条件は，まず $(p,\ q,\ r)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ に対して $E=0$ となることが必要なので，

$-3y+6z=0$ ………①，$3x-5z=0$ ………②，$-6x+5y=0$ ………③

逆に，①②③が成立するとき任意の p, q, r に対して $E=0$ となる。

①より $y=2z$ ……④，②より $x=\frac{5}{3}z$ ……⑤

④⑤を③に代入すると $-6\cdot\frac{5}{3}z+5\cdot 2z=0$ となり，成立する。

ここで，$x+y+z=1$ に④⑤を代入すると，$\frac{14}{3}z=1$，$z=\frac{3}{14}$

以上より，$x=\frac{5}{14}$，$y=\frac{3}{7}$，$z=\frac{3}{14}$

[解 説]

期待値の計算自体は簡単ですが，問われているものは，(1)では 1 変数固定という手法を用いた 2 変数関数の取り扱い，(2)では同値の条件を求めるのに必要条件を求めて後，十分性を確認するという手法です。上の解では，その点をやや詳しく書いてみました。