1

解答解説のページへ

正の整数 N に対し，N を 7 進法で表したときの数字の並びを 10 進法で表された数だと思って読みとった数を M とする。例えば，$N=7$ のとき，N は 7 進法で $10_{(7)}$ と表されるので $M=10$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $M=100$ のとき N の値を求めよ。また，$N=100$ のとき M の値を求めよ。

(2) N は 7 進法では 3 桁で表され，10 進法では 2 桁で表されるとする。$2N=M$ が成り立つとき，N の値を求めよ。

(3) 7 進法で 3 桁で表される N のうちで，$2N=M$ が成り立つ最大のものを求めよ。

(4) N は 7 進法で 4 桁で表されるとする。このとき，$2N<M$ となることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を正の実数，t を $0<t<1$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円を S とし，その中心が $\mathrm{I}(0,\ t)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{IBC}$ を θ とおく。t と a を，それぞれ θ を用いて表せ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が内接円 S の周上にあるとき，t の値を求めよ。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心が S の周上にあるとき，t の値を求めよ。ただし，三角形の各頂点から対辺，またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られており，その交わる点を三角形の垂心と呼ぶ。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外心が S の周上にあるとき，t のとり得る値をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。袋の中に赤玉が 3 個，白玉が$(n+5)$個，合計で$(n+8)$個の玉が入っている。また，空箱 A, B, C, D, E, F が用意されている。この準備の下で試行 1, 試行 2 を順に行う。

試行 1　袋から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に入れた玉が白玉ならば $i=0$，赤玉ならば $i=1$ とおく。

試行 2　次に，袋から白玉を n 個取り出して，箱 B に入れる。この時点で，袋に残った玉 7 個のうち，赤玉は$(3-i)$個，白玉は$(4+i)$個である。この 7 個の中から 2 個の玉を取り出して，箱 C に入れる。

試行 2 を終えたら，箱 A と箱 C の玉の色を記録して，箱 A, B, C の玉をすべて元通り袋に戻す。そして次の試行 3 を行う。

試行 3　袋から玉を 1 個取り出して，箱 D に入れる。次に，袋から玉を n 個取り出して，箱 E に入れる。最後に袋から玉を 2 個取り出して，箱 F に入れる。

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$i=0$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 を求めよ。また，$i=1$ であったとき，試行 2 において箱 C に赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 を求めよ。

(2)　試行 1 において，箱 A に赤玉が入る確率 q_{A} を n を用いて表せ。また，試行 1, 試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_{C} を n を用いて表せ。

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象を事象 X, 箱 E に入る玉がすべて白であるという事象を事象 Y, 箱 F に赤玉が 2 個入るという事象を事象 Z と呼ぶことにする。事象 X と事象 Y がともに起こる確率 $P(X\cap Y)$ を n を用いて表せ。また，事象 Y と事象 Z がともに起こる確率 $P(Y\cap Z)$ を n を用いて表せ。

(4)　(3)の事象 Y が起こったとき，(3)の事象 X が起こる条件付き確率 $P_Y(X)$ と，(3)の事象 Z が起こる条件付き確率 $P_Y(Z)$ をそれぞれ求めよ。

4

解答解説のページへ

実数 a に対して，座標平面上の点$(a,\ 0)$を通る傾き $4a$ の直線を L_a とする。a が実数全体を動くとき，直線 L_a が通り得る点全体からなる領域を S とする。また，2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ と $\mathrm{Q}(0,\ 2)$ に対し，$\sqrt{2}\mathrm{AP} \leqq \mathrm{AQ}$ を満たす点 A 全体からなる領域を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 領域 S を図示せよ。

(2) 領域 T を図示せよ。

(3) S と T の共通部分の面積を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$M=100$ のとき，$N=100_{(7)}=1\times 7^2=49$ である。

　$N=100$ のとき，$N=202_{(7)}$ となり，$M=202$ である。

(2)　7 進法で 3 桁の整数 N を $N=abc_{(7)}=a\times 7^2+b\times 7+c=49a+7b+c$ とすると，$M=100a+10b+c$ となる。ただし，$1\leqq a\leqq 6$，$0\leqq b\leqq 6$，$0\leqq c\leqq 6$ である。

　また，N は 10 進法では 2 桁で表されるので，$10\leqq 49a+7b+c\leqq 99$ ………①

　ここで，$2N=M$ より，$2(49a+7b+c)=100a+10b+c$ となり，

$$2a=4b+c \text{ ………②}$$

　まず，①から，$a=1$ または $a=2$ となり，

(i)　$a=1$ のとき　①から $0\leqq 7b+c\leqq 50$ ……③，②から $2=4b+c$ ……④

　④より $(b,\ c)=(0,\ 2)$ となり，これは③を満たす。

(ii)　$a=2$ のとき　①から $0\leqq 7b+c\leqq 1$ ……⑤，②から $4=4b+c$ ……⑥

　⑥より $(b,\ c)=(0,\ 4)$，$(1,\ 0)$ となるが，これは⑤を満たさない。

(i)(ii)より，$N=102_{(7)}=49+2=51$ である。

(3)　(2)と同様に $N=abc_{(7)}$ とおき，$2N=M$ から②が成り立つ。このとき，N が最大になるのは，まず 7^2 の位の数 a を最大にすることより $a=6$ である。

　すると，②から $4b+c=12$ となり，7 の位の数 b を最大にすることを考えると，

$$(b,\ c)=(3,\ 0)$$

　よって，最大の N は，$N=630_{(7)}=6\times 49+3\times 7=315$

(4)　7 進法で 4 桁の整数 N を $N=abcd_{(7)}=343a+49b+7c+d$ とすると，$M=1000a+100b+10c+d$ となる。ただし，$1\leqq a\leqq 6$，$0\leqq b\leqq 6$，$0\leqq c\leqq 6$，$0\leqq d\leqq 6$ である。このとき，

$$\begin{aligned} M-2N &= (1000a+100b+10c+d)-2(343a+49b+7c+d) \\ &= 314a+2b-4c-d \geqq 314\times 1+2\times 0-4\times 6-1\times 6=284>0 \end{aligned}$$

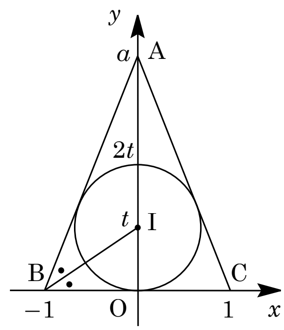
　よって，$M-2N>0$ から，$2N<M$ となる。

［解　説］

誤って読みとったという内容のときどき見かける記数法の問題です。問題文がややわかりにくいですが。

2

問題のページへ



(1)　$a>0$，$0<t<1$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(0,\ a)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ を頂点とする二等辺三角形の内接円 S の中心を $\mathrm{I}(0,\ t)$ とする。ここで，$\angle\mathrm{IBC}=\theta$ とおくと，

$$t=\mathrm{OB}\tan\theta=\tan\theta,\ a=\mathrm{OB}\tan 2\theta=\tan 2\theta$$

(2)　$a=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdots\cdots\cdots(*)$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とすると，$\mathrm{AG}:\mathrm{GO}=2:1$ より $\mathrm{G}\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$ となる。

ここで，G が S の周上にあるとき，$\dfrac{a}{3}>0$ に注意すると $\dfrac{a}{3}=2t$ となり，$(*)$から，

$$\frac{2t}{3(1-t^2)}=2t,\ 1=3(1-t^2),\ 3t^2=2$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ となる。

(4)　直線 AC の傾きは $-a$ なので，点 B から直線 AC に下ろした垂線の方程式は，

$$y=\frac{1}{a}(x+1),\ y=\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{1}{a}$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心を H とすると，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ となる。

ここで，H が S の周上にあるとき，$\dfrac{1}{a}>0$ に注意すると $\dfrac{1}{a}=2t$ となり，$(*)$から，

$$\frac{1-t^2}{2t}=2t,\ 1-t^2=4t^2,\ 5t^2=1$$

すると，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

(5)　線分 AC の中点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{a}{2}\right)$ なので，線分 AC の垂直二等分線の方程式は，

$$y-\frac{a}{2}=\frac{1}{a}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$$

y 軸との交点は $y=\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}$ なので，$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心を P とすると，$\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}\right)$ となる。ここで，P が S の周上にあるとき $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ または $\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ なので，

(i)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=0$ のとき　$a^2-1=0$ となり，$a>0$ から $a=1$

$(*)$より $\dfrac{2t}{1-t^2}=1$ すなわち $t^2+2t-1=0$ となり，$0<t<1$ から $t=-1+\sqrt{2}$

(ii)　$\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{2a}=2t$ のとき　$(*)$より $\dfrac{t}{1-t^2}-\dfrac{1-t^2}{4t}=2t$ となり，

$$4t^2-(1-t^2)^2=8t^2(1-t^2),\ 7t^4-2t^2-1=0$$

すると，$t^2=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}$ となり，$0<t<1$ から $t=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ である。

(i)(ii)より，t のとり得る値は，$t=-1+\sqrt{2}$，$\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{7}}$ である。

［解　説］

三角形の五心を題材にした点と直線の問題です。(4)と(5)は図形的な方法も考えられますが，解答例のような座標計算の方が確実でしょう。なお，(5)は配慮の感じられる問題文です。

3

問題のページへ

(1)　まず，$i=0$ であったとき，袋に残った玉は赤玉 3 個，白玉 4 個である。この袋から 2 個の玉を取り出し箱 C に入れるとき，赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_0 は，

$$p_0=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{7}$$

また，$i=1$ であったとき，袋に残った玉は赤玉 2 個，白玉 5 個である。この袋から 2 個の玉を取り出し箱 C に入れるとき，赤玉が 2 個入る条件付き確率 p_1 は，

$$p_1=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{1}{21}$$

(2)　赤玉が 3 個，白玉が $(n+5)$ 個入っている袋の中から玉を 1 個取り出して，箱 A に入れる。箱 A に赤玉が入る確率 q_A は，$q_\mathrm{A}=\dfrac{3}{n+8}$ である。

また，試行 1，試行 2 を順に行うとき，箱 C に赤玉が 2 個入る確率 q_C について，

(i)　箱 A に赤玉が入るとき　その確率は，$q_\mathrm{A}p_1=\dfrac{3}{n+8}\cdot\dfrac{1}{21}=\dfrac{1}{7(n+8)}$

(ii)　箱 A に白玉が入るとき　その確率は，$(1-q_\mathrm{A})p_0=\dfrac{n+5}{n+8}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{n+5}{7(n+8)}$

(i)(ii)より，$q_\mathrm{C}=\dfrac{1}{7(n+8)}+\dfrac{n+5}{7(n+8)}=\dfrac{n+6}{7(n+8)}$

(3)　試行 3 において，箱 D に赤玉が入るという事象 X，箱 E に入る玉がすべて白であるという事象 Y，箱 F に赤玉が 2 個入るという事象 Z に対し，

$$P(X\cap Y)=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+5}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{(n+5)!}{n!\,5!}\cdot\frac{n!\,7!}{(n+7)!}$$
$$=\frac{3}{n+8}\cdot\frac{6\cdot7}{(n+6)(n+7)}=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$P(Y\cap Z)=P(X\cap Y\cap Z)+P(\overline{X}\cap Y\cap Z)$ なので，

$$P(X\cap Y\cap Z)=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdot\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdot\frac{1}{21}$$
$$=\frac{6}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

$$P(\overline{X}\cap Y\cap Z)=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{(n+4)!}{n!\,4!}\cdot\frac{n!\,7!}{(n+7)!}\cdot\frac{1}{7}$$
$$=\frac{n+5}{n+8}\cdot\frac{5\cdot6\cdot7}{(n+5)(n+6)(n+7)}\cdot\frac{1}{7}=\frac{30}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

$$P(Y\cap Z)=\frac{6}{(n+6)(n+7)(n+8)}+\frac{30}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$
$$=\frac{36}{(n+6)(n+7)(n+8)}\cdots\cdots\cdots②$$

(4)　$P(\overline{X}\cap Y)=\dfrac{n+5}{n+8}\cdot\dfrac{{}_{n+4}\mathrm{C}_n}{{}_{n+7}\mathrm{C}_n}=\dfrac{210}{(n+6)(n+7)(n+8)}$ なので，①と合わせて，

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(\overline{X}\cap Y)$$
$$=\frac{126}{(n+6)(n+7)(n+8)}+\frac{210}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$
$$=\frac{336}{(n+6)(n+7)(n+8)}$$

すると，①から，$P_Y(X)=\dfrac{P(Y\cap X)}{P(Y)}=\dfrac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\dfrac{126}{336}=\dfrac{3}{8}$ となる。

また，②から，$P_Y(Z)=\dfrac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}=\dfrac{36}{336}=\dfrac{3}{28}$ である。

［解　説］

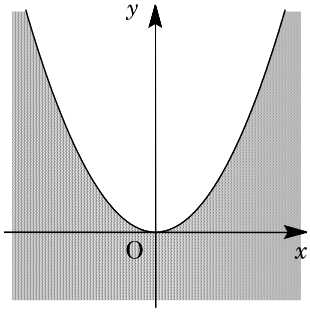
確率を題材にした読解力を試す問題です。共通テストの影響が強く感じられます。ただ，時間が不足することはないと思いますが。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　点$(a,\ 0)$を通る傾き$4a$の直線L_aの方程式は，$y=4a(x-a)$より，

$$y=4ax-4a^2\cdots\cdots\cdots①$$

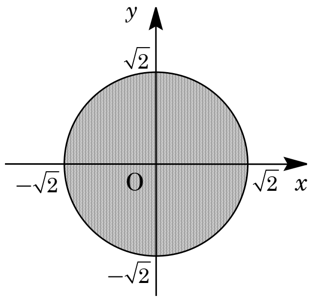


L_aが通過する点$(x,\ y)$の条件は，①を満たす実数aが存在することより，①を$4a^2-4xa+y=0$と変形して，

$$D/4=4x^2-4y\geqq 0,\ \ y\leqq x^2\cdots\cdots\cdots②$$

よって，直線L_aが通り得る点全体からなる領域Sは②で表され，図示すると右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。

(2)　$\mathrm{P}(0,\ 1)$と$\mathrm{Q}(0,\ 2)$に対し，$\sqrt{2}\mathrm{AP}\leqq\mathrm{AQ}$すなわち$2\mathrm{AP}^2\leqq\mathrm{AQ}^2$を満たす点Aを$\mathrm{A}(x,\ y)$とおく。



すると，$2\{x^2+(y-1)^2\}\leqq x^2+(y-2)^2$から，

$$2x^2+2y^2-4y+2\leqq x^2+y^2-4y+4$$

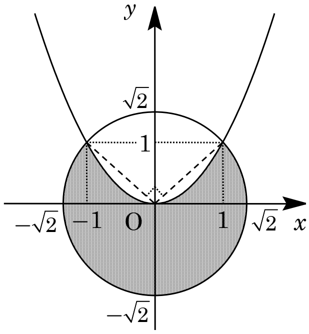
$$x^2+y^2\leqq 2\cdots\cdots\cdots③$$

よって，点A全体からなる領域Tは③で表され，図示すると右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含む。

(3)　境界線の交点は，$y=x^2$と$x^2+y^2=2$を連立して，

$$y+y^2=2,\ \ y^2+y-2=0,\ \ (y+2)(y-1)=0$$

$y\geqq 0$より$y=1$，このとき$x=\pm 1$である。



これより, SとTの共通部分の面積Uは, y軸に関する対称性に注意すると,

$$U=\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-2\int_0^1(x-x^2)\,dx$$

$$=2\pi-\frac{\pi}{2}-2\Big[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big]_0^1=\frac{3}{2}\pi-\frac{1}{3}$$

［解　説］

軌跡と領域についての基本的な頻出題です。