

1

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ が $x = a$ で極大値をとるとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の満たす条件を求めよ。
- (2) 次の不等式を解け。 $|x+1| + |x-2| \leq 4$
- (3) x が(2)の範囲を動くとき、 $f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

座標平面において、2つの放物線 $y = x^2$ ， $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上にそれぞれ点 $A(1, 1)$ ，点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 $y = x^2$ 上に点 A と異なる点 B があり、 \overline{AB} と \overline{CB} は垂直であるとする。このとき、 B の座標を求めよ。
- (2) 放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2}$ 上に点 C と異なる点 D があり、 \overline{AD} と \overline{CD} は垂直であるとする。このとき、 D の座標を求めよ。
- (3) B, D はそれぞれ(1), (2)で定めたものとする。このとき、四角形 $ABCD$ が正方形であることを示せ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目の数を a , 2 回目に出た目の数を b , 3 回目に出た目の数を c とする。また, $f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $b^2 > 4c$ である確率を求めよ。
- (2) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ確率を求めよ。
- (3) 2 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつとき, $f'(1) = 1$ である条件付き確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) $A = \sin x$ とおく。 $\sin 5x$ を A の整式で表せ。
- (2) $\sin^2 \frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。
- (3) 曲線 $y = \cos 3x$ ($x \geq 0$) と曲線 $y = \cos 7x$ ($x \geq 0$) の共有点の x 座標を小さい方から順に x_1, x_2, x_3, \dots とする。このとき関数 $y = \cos 3x$ ($x_5 \leq x \leq x_6$) の値域を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{2a+1}{2}x^2 - ax$ に対して,

$$f'(x) = -2x^2 + (2a+1)x - a$$

$$= -(2x-1)(x-a)$$

$f(x)$ が $x=a$ で極大値をとる条件は,

$f'(x)$ の符号が $x=a$ の前後で正から負に変化することなので, $a > \frac{1}{2}$ である。

x	...	$\frac{1}{2}$...	a	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		↘		↗	

(2) 不等式 $|x+1| + |x-2| \leq 4$ ……(*) に対して,

(i) $x < -1$ のとき $-(x+1) - (x-2) \leq 4$ より $-2x \leq 3$ となり, $x \geq -\frac{3}{2}$

これより, (*) は $-\frac{3}{2} \leq x < -1$ で満たされている。

(ii) $-1 \leq x < 2$ のとき $(x+1) - (x-2) \leq 4$ より $3 \leq 4$ となり, つねに成立。

これより, (*) は $-1 \leq x < 2$ で満たされている。

(iii) $x \geq 2$ のとき $(x+1) + (x-2) \leq 4$ より $2x \leq 5$ となり, $x \leq \frac{5}{2}$

これより, (*) は $2 \leq x \leq \frac{5}{2}$ で満たされている。

(i)~(iii) より, (*) の解は $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ である。

(3) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ における $f(x)$ の最大値と最小値について, $f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}, \quad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$$

(i) $a \geq \frac{5}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減は右表で, $f\left(-\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$ から, $f(x)$ の最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$, 最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}$ である。

x	$-\frac{3}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

(ii) $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$ のとき

$f(x)$ の増減は右表で, 最大値について, $D_1 = f(a) - f\left(-\frac{3}{2}\right)$ とおくと,

x	$-\frac{3}{2}$...	$\frac{1}{2}$...	a	...	$\frac{5}{2}$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		↘		↗		↘	

$$D_1 = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{15}{4}a - \frac{27}{8}, \quad D_1' = a^2 - a - \frac{15}{4} = \frac{1}{4}(2a+3)(2a-5)$$

すると, $\frac{1}{2} < a < \frac{5}{2}$ において $D_1' < 0$ から D_1 は単調に減少する。 $a = \frac{1}{2}$ のとき

$D_1 = -\frac{16}{3} < 0$ なので, $D_1 < 0$ すなわち $f(a) < f\left(-\frac{3}{2}\right)$ である。

これより、 $f(x)$ の最大値は $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$ である。

また、最小値について、 $D_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)$ とおくと、

$$D_2 = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24} - \frac{15}{4}a + \frac{175}{24} = -4a + \frac{22}{3} = -4\left(a - \frac{11}{6}\right)$$

(ii-i) $D_2 \geq 0$ $\left(\frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6}\right)$ のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f\left(\frac{5}{2}\right)$ より、 $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{4}a - \frac{175}{24}$ である。

(ii-ii) $D_2 < 0$ $\left(\frac{11}{6} < a \leq \frac{5}{2}\right)$ のとき

$f\left(\frac{1}{2}\right) < f\left(\frac{5}{2}\right)$ より、 $f(x)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{4} + \frac{1}{24}$ である。

(i)(ii)より、 $f(x)$ の最大値は $\frac{15}{4}a + \frac{27}{8}$ であり、最小値は、

$$-\frac{a}{4} + \frac{1}{24} \left(\frac{11}{6} < a \text{ のとき}\right), \frac{15}{4}a - \frac{175}{24} \left(\frac{1}{2} < a \leq \frac{11}{6} \text{ のとき}\right)$$

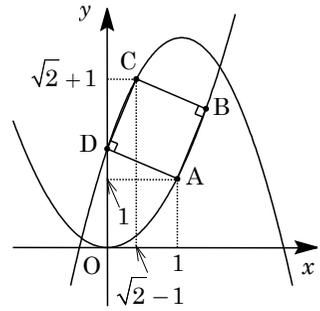
[解説]

微分と最大・最小についての問題です。内容は標準的ですが、ただ数値計算がかなり煩雑です。

2

問題のページへ

- (1) 放物線 $y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ 上に点 $A(1, 1)$ ，放物線 $y = -\sqrt{2}x^2 + 3x + \sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ 上に点 $C(\sqrt{2}-1, \sqrt{2}+1)$ がある。このとき放物線①上に、点 A と異なる点 $B(t, t^2)$ ($t \neq 1$) を、 \overline{AB} と \overline{CB} が垂直になるようにとると、



$$\overline{AB} = (t-1, t^2-1) = (t-1)(1, t+1)$$

$$\overline{CB} = (t-\sqrt{2}+1, t^2-\sqrt{2}-1)$$

すると、 $\overline{AB} \cdot \overline{CB} = 0$ から、

$$(t-\sqrt{2}+1) + (t+1)(t^2-\sqrt{2}-1) = 0$$

まとめると、 $t^3 + t^2 - \sqrt{2}t - 2\sqrt{2} = 0$ となり、

$$(t-\sqrt{2})\{t^2 + (\sqrt{2}+1)t + 2\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$t^2 + (\sqrt{2}+1)t + 2 = 0$ は、 $D = (\sqrt{2}+1)^2 - 8 = 2\sqrt{2} - 5 < 0$ より実数解をもたないので、③の実数解は $t = \sqrt{2}$ となり、これより $B(\sqrt{2}, 2)$ である。

- (2) 放物線②上に、点 C と異なる点 $D(s, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2})$ ($s \neq \sqrt{2}-1$) を、 \overline{AD} と \overline{CD} が垂直になるようにとると、 $\overline{AD} = (s-1, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2}-1)$

$$\overline{CD} = (s-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2}-\sqrt{2}-1)$$

$$= (s-\sqrt{2}+1)(1, -\sqrt{2}s + \sqrt{2}+1)$$

すると、 $\overline{AD} \cdot \overline{CD} = 0$ から、

$$(s-1) + (-\sqrt{2}s^2 + 3s + \sqrt{2}-1)(-\sqrt{2}s + \sqrt{2}+1) = 0$$

まとめると、 $s^3 - (2\sqrt{2}+1)s^2 + (2\sqrt{2}+1)s = 0$ となり、

$$s\{s^2 - (2\sqrt{2}+1)s + 2\sqrt{2}+1\} = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$s^2 - (2\sqrt{2}+1)s + 2\sqrt{2}+1 = 0$ は、 $D = (2\sqrt{2}+1)^2 - 4(2\sqrt{2}+1) = 5 - 4\sqrt{2} < 0$ より実数解をもたないので、④の実数解は $s = 0$ となり、これより $D(0, \sqrt{2})$ である。

- (3) (1)(2)より、 $\overline{AB} = (\sqrt{2}-1, 1)$ ， $\overline{AD} = (-1, \sqrt{2}-1)$ となり、

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = -(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1) = 0$$

これより、 \overline{AB} と \overline{AD} は垂直になり、四角形 $ABCD$ は長方形である。

さらに、 $|\overline{AB}| = |\overline{AD}| = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + 1}$ から、四角形 $ABCD$ は正方形である。

[解説]

放物線を題材にした問題です。平易な内容であるものの、計算量はかなりのもので、時間を費やしてしまいます。

3

問題のページへ

- (1) さいころを 3 回投げ、出た目の数を順に a, b, c とする。
 ここで、 $b^2 > 4c$ となるのは、 $c=1, 2$ のとき $3 \leq b \leq 6$ で 4 通りずつ、 $c=3$ のとき $4 \leq b \leq 6$ で 3 通り、 $c=4, 5, 6$ のとき $5 \leq b \leq 6$ で 2 通りずつである。
 a は任意なので、求める確率は、 $\frac{6 \times (4 \times 2 + 3 + 2 \times 3)}{6^3} = \frac{17}{36}$ である。
- (2) $f(x) = (-1)^a x^2 + bx + c$ に対し、 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつのは、
 (i) a が偶数 ($a = 2, 4, 6$) のとき $f(x) = x^2 + bx + c$
 $D > 0$ ($b^2 - 4c > 0$) から、 $3 \times (4 \times 2 + 3 + 2 \times 3) = 3 \times 17$ 通りの場合がある。
 (ii) a が奇数 ($a = 1, 3, 5$) のとき $f(x) = -x^2 + bx + c$
 $D > 0$ ($b^2 + 4c > 0$) から、任意の b, c で成り立ち、 3×6^2 通りの場合がある。
 (i)(ii) より、求める確率は、 $\frac{3 \times 17 + 3 \times 6^2}{6^3} = \frac{53}{72}$ である。
- (3) $f'(x) = 2(-1)^a x + b$ となり、 $f'(1) = 1$ より $2(-1)^a + b = 1 \dots\dots\dots(*)$
 ここで、 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、かつ $f'(1) = 1$ を満たすのは、
 (i) a が偶数 ($a = 2, 4, 6$) のとき
 $(*)$ より $2 + b = 1$ となるので満たす b は存在せず、この場合はない。
 (ii) a が奇数 ($a = 1, 3, 5$) のとき
 $(*)$ より $-2 + b = 1$ となるので $b = 3$ である。また $D > 0$ はつねに成り立つので c は任意となり、 $3 \times 1 \times 6 = 18$ 通りの場合がある。
 (i)(ii) より、 $f(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、かつ $f'(1) = 1$ を満たす確率は、
 $\frac{0 + 18}{6^3} = \frac{1}{12}$
 以上より、求める条件付き確率は、 $\frac{1}{12} \div \frac{53}{72} = \frac{6}{53}$ である。

[解説]

確率の基本問題です。題材も頻出タイプです。

4

問題のページへ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin 5x &= \sin(3x+2x) = \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x \\
 &= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1 - 2\sin^2 x) + (4\cos^3 x - 3\cos x) \cdot 2\sin x \cos x \\
 &= (3\sin x - 4\sin^3 x)(1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x \cos^2 x (4\cos^2 x - 3)
 \end{aligned}$$

ここで、 $A = \sin x$ とおくと、

$$\begin{aligned}
 \sin 5x &= (3A - 4A^3)(1 - 2A^2) + 2A(1 - A^2)(4 - 4A^2 - 3) \\
 &= (3A - 10A^3 + 8A^5) + 2A(1 - 5A^2 + 4A^4) = 16A^5 - 20A^3 + 5A
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad A = \sin \frac{\pi}{5} \text{ とおくと, (1)より } \sin \pi = 16A^5 - 20A^3 + 5A \text{ となり, } A \neq 0 \text{ から,}$$

$$\begin{aligned}
 16A^5 - 20A^3 + 5A &= 0, \quad 16A^4 - 20A^2 + 5 = 0 \\
 A^2 &= \frac{10 \pm \sqrt{20}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8} \text{ となり, } 0 < A < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ から } 0 < A^2 < \frac{1}{2} \text{ なので,}
 \end{aligned}$$

$$A^2 = \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

$$(3) \quad x \geq 0 \text{ において, 曲線 } y = \cos 3x \cdots \cdots \textcircled{1} \text{ と曲線 } y = \cos 7x \cdots \cdots \textcircled{2} \text{ を連立すると,}$$

$$\cos 7x - \cos 3x = 0, \quad -2\sin 5x \sin 2x = 0$$

これより、 n を 0 以上の整数として、 $5x = n\pi$ または $2x = n\pi$ より、 $x = \frac{n}{5}\pi$, $\frac{n}{2}\pi$

曲線①と曲線②の共有点を x 座標の小さい方から並べ x_1, x_2, x_3, \dots とすると、

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{5}, \quad x_3 = \frac{2}{5}\pi, \quad x_4 = \frac{\pi}{2}, \quad x_5 = \frac{3}{5}\pi, \quad x_6 = \frac{4}{5}\pi$$

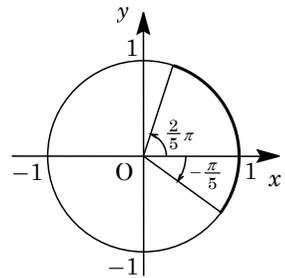
さて、関数 $y = \cos 3x$ ($\frac{3}{5}\pi \leq x \leq \frac{4}{5}\pi$) に対して、 $\frac{9}{5}\pi \leq 3x \leq \frac{12}{5}\pi$ となり、

$$\cos \frac{12}{5}\pi = \cos \frac{2}{5}\pi < \cos \frac{\pi}{5} = \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) = \cos \frac{9}{5}\pi$$

これより、 $\cos \frac{2}{5}\pi \leq y \leq 1$ となり、(2)から、

$$\cos \frac{2}{5}\pi = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{5} = 1 - 2 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

よって、 $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \leq y \leq 1$ である。



[解説]

三角関数の公式適用の問題です。(3)の結論まで、丁寧な誘導がついています。