1

解答解説のページへ

$m,\ p,\ q$ を実数とする。2 つの関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$，$g(x)=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+q$ を考える。座標平面上の放物線 $C_1: y=f(x)$，$C_2: y=g(x)$ および直線 $l: y=mx$ について，次の 2 つの条件(i), (ii)が成り立つとする。

(i)　直線 l は原点 O において放物線 C_1 に接している。

(ii)　直線 l は放物線 C_2 に接している。

直線 l と放物線 C_2 の接点を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　m の値を求めよ。

(2)　q を p を用いて表せ。また，点 A の座標を p を用いて表せ。

(3)　$p\neq -1$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 の 2 つの共有点の x 座標を p を用いて表せ。

(4)　$p=2$ とする。放物線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形のうち，$x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S と，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積 T をそれぞれ求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b を正の定数とする。$0<\theta<\pi$ を満たす実数 θ に対し，平面上で，次の 3 つの条件(i)，(ii)，(iii)を満たす三角形 PAB，およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i)　$\mathrm{PA}=a$，$\mathrm{PB}=b$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ である。

(ii)　2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii)　$\mathrm{AB}=3\mathrm{AD}$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB の長さを a，b，θ を用いて表せ。

(2)　S を a，b，θ を用いて表せ。

(3)　θ が $0<\theta<\pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし，S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。M を a, b を用いて表せ。また，$\sin\beta$ および $\cos\beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4)　$a=16$，$b=25$ とする。また，β を(3)で定めた値とする。$\theta=\beta$ のときの，点 P と直線 AB の距離を求めよ。

3

解答解説のページへ

1 個のさいころを 2 回投げる。1 回目に出た目をa_1, 2 回目に出た目をa_2とする。次に, 1 枚の硬貨を 2 回投げる。1 回目に表が出た場合は$b_1=1$, 裏が出た場合は$b_1=a_1$とおく。また, 2 回目に表が出た場合は$b_2=1$, 裏が出た場合は$b_2=a_2$とおく。ベクトル$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a_1+a_2=7$である確率を求めよ。

(2)　$b_1=1$である確率を求めよ。

(3)　$\vec{b}=(1,\ 1)$であったとき, $\vec{a}=(1,\ 6)$である条件付き確率を求めよ。

(4)　$\vec{b}=(1,\ 1)$であったとき, $a_1+a_2=7$である条件付き確率を求めよ。

$\boxed{4}$　解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次の条件(i), (ii)により定める。

(i)　$a_1=1$である。

(ii)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，n が奇数ならば$a_{n+1}=-a_n+1$，また n が偶数ならば$a_{n+1}=-2a_n+3$である。

さらに，数列$\{b_n\}$を$b_n=a_{2n-1}$により定め，数列$\{c_n\}$を$c_n=a_{2n}$により定める。次の問いに答えよ。

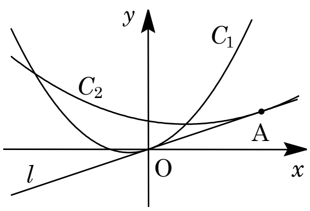
(1)　a_2，a_3，a_4，a_5を求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$の一般項をそれぞれ求めよ。

(3)　自然数 m に対して，数列$\{a_n\}$の初項から第$(2m-1)$項までの和をT_mとする。T_mを m を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1: y=\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x$ ……①に対して，$y'=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}$ となるので，$x=0$ のとき $y'=\dfrac{1}{3}$ である。

すると，直線 $l: y=mx$ は原点 O において放物線 C_1 に接しているので，$m=\dfrac{1}{3}$ となる。

(2)　$C_2: y=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+q$ ……②と $l: y=\dfrac{1}{3}x$ を連立し，$\dfrac{1}{6}(x-p)^2+q=\dfrac{1}{3}x$ から，

$$(x-p)^2+6q=2x,\ x^2-2(p+1)x+p^2+6q=0 \ \cdots\cdots③$$

直線 l は放物線 C_2 に接しているので，③は重解をもち，

$$D/4=(p+1)^2-(p^2+6q)=0,\ 2p+1=6q$$

よって，$q=\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{6}$ ……④となり，このとき③の重解は $x=p+1$ であるので，接点 A の座標は，$\mathrm{A}\left(p+1,\ \dfrac{p+1}{3}\right)$ となる。

(3)　②に④を代入し，①と連立すると，$\dfrac{2}{3}x^2+\dfrac{1}{3}x=\dfrac{1}{6}(x-p)^2+\dfrac{1}{3}p+\dfrac{1}{6}$ となり，

$$4x^2+2x=(x-p)^2+2p+1,\ 3x^2+2(p+1)x-(p+1)^2=0$$

すると，$(3x-p-1)(x+p+1)=0$ となり，$p\neq -1$ に注意すると，C_1 と C_2 の 2 つの共有点の x 座標は，$x=\dfrac{p+1}{3},\ -p-1$ である。

(4)　$p=2$ のとき，②④から $C_2: y=\dfrac{1}{6}(x-2)^2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{3}{2}$ となり，また(3)から，C_1 と C_2 の 2 つの共有点の x 座標は $x=1,\ -3$ となる。

さて，C_1 と C_2 で囲まれた図形のうち，$x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S，$x\leqq 0$ の範囲にある部分の面積を T とすると，

$$S=\int_0^1\left\{\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x\right)\right\}dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{5}{6}$$
$$T+S=\int_{-3}^1\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}\int_{-3}^1(x+3)(x-1)dx$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)(1+3)^3=\frac{16}{3}$$

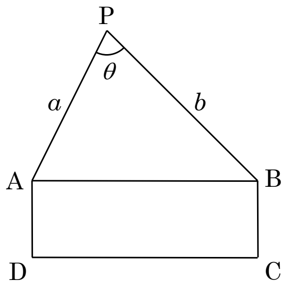
よって，$T=(T+S)-S=\dfrac{16}{3}-\dfrac{5}{6}=\dfrac{9}{2}$ となる。

［解　説］

微積分の総合問題です。基本的な内容的ですが，量的には多めです。

2

問題のページへ



(1)　右図の△PAB に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}$$

(2)　△PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とすると，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ より，(1)の結果を利用して，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\mathrm{AB}\cdot\frac{1}{3}\mathrm{AB}$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{3}(a^2+b^2-2ab\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{6}ab(3\sin\theta-4\cos\theta)$$

(3)　$f(\theta)=3\sin\theta-4\cos\theta$ とおくと，$f(\theta)=5\sin(\theta+\alpha)$ となり，

$$\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=-\frac{4}{5}$$

ここで，$0<\theta<\pi$ のとき $\alpha<\theta+\alpha<\pi+\alpha$ となり，α が第 4 象限の角であることに注意すると，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ のとき $f(\theta)$ は最大値 5 をとる。

これより，S の最大値 M は，$M=\dfrac{1}{3}a^2+\dfrac{1}{3}b^2+\dfrac{5}{6}ab$ である。

このとき $\theta=\beta$ なので，$\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ から，

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=-\frac{4}{5}$$

(4)　$a=16$，$b=25$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\cdot16\cdot25\cdot\dfrac{3}{5}=120$

また，$\cos\beta=-\dfrac{4}{5}$ から，$\mathrm{AB}=\sqrt{16^2+25^2-2\cdot16\cdot25\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)}=\sqrt{1521}=39$ となり，点 P と直線 AB の距離を h とおくと，$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{39}{2}h$ となるので，

$$\frac{39}{2}h=120,\ h=120\cdot\frac{2}{39}=\frac{80}{13}$$

［解　説］

三角比の図形への応用問題です。(3)で $f(\theta)$ の最大値を求める際に，内積という見方をした方がすっきりしますが，ここでは問題文に α でなく β が指定してある点に注目し，出題者の意図も忖度して sin での合成で処理しました。

３　問題のページへ

(1)　さいころを 2 回投げ，1 回目に出た目を a_1，2 回目に出た目を a_2 とするとき，$a_1+a_2=7$ である事象を A とおく。このとき，$(a_1,\ a_2)$ の組は，

$$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (6,\ 1)$$

よって，事象 A の確率は，$P(A)=\dfrac{1}{6^2}\times 6=\dfrac{1}{6}$ である。

(2) さいころを 2 回投げた後に，1 枚の硬貨を 2 回投げる。1 回目が表の場合は $b_1=1$，裏の場合は $b_1=a_1$，また 2 回目が表の場合は $b_2=1$，裏の場合は $b_2=a_2$ とおく。

このとき，$b_1=1$ であるのは，$a_1=1$ のときは硬貨の出方は任意，$a_1\neq 1$ のときは硬貨が表の出る場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times 1+\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$

(3)　$b_2=1$ の場合は $b_1=1$ の場合と同様なので，$(b_1,\ b_2)=(1,\ 1)$ である事象を B とおくと，(2)から，

$$P(B)=\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{49}{144}$$

次に，$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6)$ である事象を $A_{1,6}$ とおく。すると，事象 $A_{1,6}\cap B$ すなわち $(a_1,\ a_2)=(1,\ 6)$ かつ $(b_1,\ b_2)=(1,\ 1)$ であるのは，さいころの 1 回目に 1，2 回目に 6 が出て，次に硬貨の 1 回目は任意，2 回目に表が出る場合より，その確率は，

$$P(A_{1,6}\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{72}$$

よって，$\vec{b}=(1,\ 1)$ であったとき，$\vec{a}=(1,\ 6)$ である条件付き確率は，

$$P_B(A_{1,6})=\frac{P(B\cap A_{1,6})}{P(B)}=\frac{P(A_{1,6}\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{72}\div\frac{49}{144}=\frac{2}{49}$$

(4)　(3)と同様にして，$A=A_{1,\,6}\cup A_{2,\,5}\cup A_{3,\,4}\cup A_{4,\,3}\cup A_{5,\,2}\cup A_{6,\,1}$ に留意すると，

(i)　$\vec{a}=(1,\ 6)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき　(3)から，$P(A_{1,6}\cap B)=\dfrac{1}{72}$

(ii)　$\vec{a}=(2,\ 5)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき

さいころの 1 回目に 2，2 回目に 5 が出て，次に硬貨の 1 回目に表，2 回目に表が出る場合より，その確率は，

$$P(A_{2,5}\cap B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{144}$$

(iii)　$\vec{a}=(3,\ 4)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき　(ii)と同様に考えて，$P(A_{3,4}\cap B)=\dfrac{1}{144}$

(iv)　$\vec{a}=(4,\ 3)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき　(ii)と同様に考えて，$P(A_{4,3}\cap B)=\dfrac{1}{144}$

(v)　$\vec{a}=(5,\ 2)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき　(ii)と同様に考えて，$P(A_{5,2}\cap B)=\dfrac{1}{144}$

(vi)　$\vec{a}=(6,\ 1)$ かつ $\vec{b}=(1,\ 1)$ のとき　(3)と同様に考えて，$P(A_{6,1}\cap B)=\dfrac{1}{72}$

(i)～(vi)より，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{144}+\dfrac{1}{72}=\dfrac{1}{18}$

以上より，$\vec{b}=(1,\ 1)$ であったとき，$a_1+a_2=7$ である条件付き確率は,

$$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1}{18}\div\frac{49}{144}=\frac{8}{49}$$

［解　説］

条件付き確率を求める問題です。非常に細かな誘導が付いています。

4

問題のページへ

(1)　$a_1=1$ で，n が奇数のとき $a_{n+1}=-a_n+1$，n が偶数のとき $a_{n+1}=-2a_n+3$ から，

$$a_2=-a_1+1=-1+1=0,\quad a_3=-2a_2+3=0+3=3$$

$$a_4=-a_3+1=-3+1=-2,\quad a_5=-2a_4+3=4+3=7$$

(2)　$a_{2n+1}=-2a_{2n}+3$，$a_{2n}=-a_{2n-1}+1$ となり，$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$ から，

$$b_{n+1}=-2c_n+3\cdots\cdots\cdots①,\quad c_n=-b_n+1\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入すると，$b_{n+1}=-2(-b_n+1)+3=2b_n+1$ となり，

$$b_{n+1}+1=2(b_n+1)$$

$b_1=a_1=1$ から，$b_n+1=(b_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^n$ となり，$b_n=2^n-1\cdots\cdots\cdots③$

②から，$c_n=-(2^n-1)+1=-2^n+2\cdots\cdots\cdots④$

(3)　$T_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{2m-1}a_k=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}+a_{2k})-a_{2m}=\sum_{k=1}^{m}(b_k+c_k)-c_m$ となり，③④から，

$$T_m=\sum_{k=1}^{m}(2^k-1-2^k+2)-(-2^m+2)=\sum_{k=1}^{m}1+2^m-2=2^m+m-2$$

［解　説］

漸化式と数列の問題です。一見，難しそうな設定ですが，誘導に従えば，基本的な式計算で結論が導けます。