

1

問題のページへ

(1) $a = b = -1$, $P'(3, 2)$ のとき, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ より,

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

よって, $P(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ となる。

(2) $A = \begin{pmatrix} a & 2-a \\ 1+a & 2 \end{pmatrix}$ から, $\det A = 2a - (2-a)(1+a) = a^2 + a - 2$ となり,

$$A^2 - (a+2)A + (a^2 + a - 2)E = O$$

条件より, $A^2 = kE$ なので, $-(a+2)A + (k+a^2+a-2)E = O \dots\dots\dots$

(i) $a+2=0$ ($a=-2$) のとき に代入すると, $kE=O$ となり, $k=0$

(ii) $a+2 \neq 0$ ($a \neq -2$) のとき より, $A = \frac{k+a^2+a-2}{a+2}E$ となる。

しかし, $2-a=1+a=0$ を満たす a は存在しないので, 不適である。

(i)(ii)より, $a=-2$, $k=0$

(3) 点 P' が原点 O に一致すると, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$ より, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -B \dots\dots\dots$

(i) $\det A = a^2 + a - 2 \neq 0$ ($a \neq 1$ かつ $a \neq -2$) のとき

より, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -A^{-1}B$ となり, P' が O に一致する点 P は存在する。

(ii) $\det A = a^2 + a - 2 = 0$ ($a=1$ または $a=-2$) のとき

(ii-a) $a=1$ のとき より, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$ となり,

$$x + y = -2b, \quad 2x + 2y = -b$$

これより, $b=0$ のとき, を満たす点 P は直線 $x + y = 0$ 上にある。

また, $b \neq 0$ のとき, を満たす点 P は存在しない。

(ii-b) $a=-2$ のとき より, $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2b \\ b \end{pmatrix}$ となり,

$$-2x + 4y = -2b, \quad -x + 2y = -b$$

これより, を満たす点 P は直線 $-x + 2y = -b$ 上にある。

(i)(ii)より, どんな点 P に対しても P' が O に一致しない条件は, $a=1$, $b \neq 0$

[解 説]

行列について, 基本的な 3 つの設問で構成されています。ただ, 誘導の形式ではありません。

2

問題のページへ

(1) 自然数 m, n に対して, $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ と仮定すると,

$$2^{\frac{m}{n}} = 3, \quad 2^m = 3^n \dots\dots\dots$$

すると, は左辺が偶数, 右辺が奇数となり成立しない。

したがって, $\log_2 3 = \frac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(2) p, q を異なる自然数とし, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

ここで, $p > q$ としても一般性を失わないので, l を自然数として,

$$p \log_2 3 - q \log_2 3 = l, \quad \log_2 3 = \frac{l}{p-q} \dots\dots\dots$$

これは, (1)の結論に反するので, $p \log_2 3$ と $q \log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3) まず, $\log_2 8 < \log_2 9$ より, $\log_2 2^3 < \log_2 3^2$, $3 < 2 \log_2 3$ となり,

$$1.5 < \log_2 3 \dots\dots\dots$$

また, $\log_2 243 < \log_2 256$ より, $\log_2 3^5 < \log_2 2^8$, $5 \log_2 3 < 8$ となり,

$$\log_2 3 < 1.6 \dots\dots\dots$$

より, $\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5 である。

[解 説]

(1)と(2)はつながっているものの, (3)は独立の設問です。2 の累乗を 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 3 の累乗を 3, 9, 27, 81, 243, ... と書き並べて, 評価式を考えました。

3

問題のページへ

(1) k を定数として, $f(x) = a \cos^2 x + 2b \cos x \sin x + c \sin^2 x = k \dots\dots (*)$ とおく。

まず, $x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ に対して, $(*)$ が成り立つことより,

$$a = k, \quad c = k, \quad \frac{1}{2}a + b + \frac{1}{2}c = k$$

すると, $a = c = k, \quad b = 0$ となり, このとき任意の x で, 明らかに $(*)$ は成り立つ。よって, $f(x)$ が定数となる条件は, $a = c, \quad b = 0$ である。

$$(2) \quad g(x) = 4 \cos^2 x + 2 \cos x \sin x + \sin^2 x - \frac{5}{2} = 4 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + \sin 2x + \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{5}{2}$$

$$= \sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x = \frac{\sqrt{13}}{2} \sin(2x + \alpha)$$

ただし, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$ であり, これより $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ となる。

さて, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ から, $-\frac{\pi}{2} + \alpha < 2x + \alpha < \frac{\pi}{2} + \alpha$ となり, $g(x)$ は $2x + \alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値をとる。すなわち, $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$ であり,

$$\cos 2\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin 2\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$(3) \quad \int_0^\theta g(x) dx = \int_0^\theta \left(\sin 2x + \frac{3}{2} \cos 2x \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{4} \sin 2x \right]_0^\theta$$

$$= -\frac{1}{2} (\cos 2\theta - 1) + \frac{3}{4} \sin 2\theta$$

$$(2) \text{ の結果を用いると, } \int_0^\theta g(x) dx = -\frac{3}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{13}} = \frac{1}{2}$$

[解 説]

三角関数の理解を問う問題です。(1)とそれ以降の設問には, 直接的な関連は見当たりません。

4

問題のページへ

- (1) 線分 AB を 1:2 に内分する点が O, 1:4 に外分する点 C より, $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$ とおくと,

$$\overrightarrow{PO} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}, \quad \overrightarrow{PC} = \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{-2\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

- (2) 点 P は円 S の内部にあるので, $\angle BPC > 90^\circ$ となり,

$$\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = \vec{b} \cdot \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3} < 0, \quad 4\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{b}|^2$$

$$\text{よって, } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} < \frac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$$

- (3) $\overrightarrow{QP} = k\vec{b}$ ($k > 0$) とおくと, $\overrightarrow{QB} = (1+k)\vec{b}$, $\overrightarrow{QC} = k\vec{b} + \frac{4\vec{a} - \vec{b}}{3} = \frac{4\vec{a} + (3k-1)\vec{b}}{3}$

$$\text{点 Q は円 S 上の点より, } \overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} = (1+k)\vec{b} \cdot \frac{4\vec{a} + (3k-1)\vec{b}}{3} = 0 \text{ となり,}$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} + (3k-1)|\vec{b}|^2 = 0, \quad 4|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta + (3k-1)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\text{よって, } 3k|\vec{b}| = |\vec{b}| - 4|\vec{a}| \cos \theta \text{ から, } PQ = k|\vec{b}| = \frac{|\vec{b}| - 4|\vec{a}| \cos \theta}{3} \text{ となる.}$$

- (4) $PA = 3$, $PB = 2$ から, (2)の結果を用いると, $PQ = \frac{2-12\cos \theta}{3}$ となり,

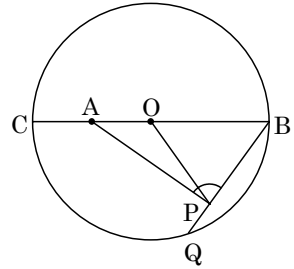
$$BQ = 2 + \frac{2-12\cos \theta}{3} = \frac{8-12\cos \theta}{3} = \frac{8-12\cos \theta}{3} \cdot \frac{BP}{2} = \frac{4-6\cos \theta}{3} BP$$

$$\text{また, } BA = \frac{3}{2}BO \text{ から, } \angle QAB = \frac{4-6\cos \theta}{3} \cdot \frac{3}{2} \quad \angle POB = (2-3\cos \theta) \quad \angle POB$$

条件より, $\angle QAB = \angle POB$ なので, $2-3\cos \theta = 3$ となり,

$$\cos \theta = -\frac{1}{3}, \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{以上より, } PAB = \frac{1}{2}PA \cdot PB \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$$



[解説]

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

5

(1) 最初、石は点 A にあるので、 $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = 0$

(2) 右の状態の遷移図より、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}(1 - b_n) \dots\dots\dots$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n = \frac{1}{2}(1 - c_n) \dots\dots\dots$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n = \frac{1}{2}(1 - a_n) \dots\dots\dots$$

より、

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad b_2 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad b_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}, \quad c_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$$

(3) (1)より、 $a_1 = b_1 = \frac{1}{2}$ となり、 a_1, b_1, c_1 のうち 2 つの値は一致する。

また、 a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値が一致するとき、 $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ のうち 2 つの値は、
より、明らかに一致する。

よって、帰納的に、 a_n, b_n, c_n のうち 2 つの値は一致する。

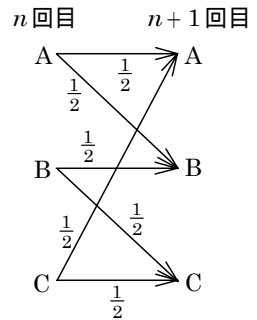
(4) a_n, b_n, c_n のうち一致する 2 つの値を p_n とするとき、 $p_1 = \frac{1}{2}$ で、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - p_n), \quad p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$$

これより、 $p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ となり、

$$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

問題のページへ



[解 説]

確率と漸化式の融合についての典型題です。このタイプでは「全確率の和は 1」という当たり前のことを、いつも気にかけておく必要があります。