1

問題のページへ

(1) まず，点$P_1(1,\ 0)$が点$P_2(0,\ 3)$に移されることより，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

これから，$A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 3 & d \end{pmatrix}$となり，$A^2=\begin{pmatrix} 0 & b \\ 3 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ 3 & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3b & bd \\ 3d & 3b+d^2 \end{pmatrix}$

また，A^2の表す1次変換によって，点$P_2(0,\ 3)$は点$P_1(1,\ 0)$に移されるので，

$$\begin{pmatrix} 3b & bd \\ 3d & 3b+d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 3bd \\ 9b+3d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより，$3bd=1$ ……①，$3(3b+d^2)=0$ ……②となる。

②より，$3b=-d^2$となり，①に代入して，$d^3=-1$

よって，$d=-1$，$b=-\frac{1}{3}$となり，$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$である。

(2) 条件より，A^3の表す 1 次変換によって，点$P_1(1,\ 0)$は点P_1，点$P_2(0,\ 3)$は点P_2に移されることより，

$$A^3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これより, kを0以上の整数とし，A^0を単位行列とすると，

(i) $n=3k+1$のとき　$A^n=A^{3k+1}=(A^3)^kA=A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}$

(ii) $n=3k+2$のとき　$A^n=A^{3k+2}=(A^3)^kA^2=A^2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$

(iii) $n=3k+3$のとき　$A^n=A^{3k+3}=(A^3)^kA^3=A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(p,\ q)$とおくと，条件より，

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 9\cos\theta-3\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{3}\sin\theta\cos\theta+\sin\theta(3\cos\theta-\sin\theta)=\frac{8}{3}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta$$

$$=\frac{4}{3}\sin2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{73}}{6}\sin(2\theta+\alpha)-\frac{1}{2}$$

ただし，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{73}}$，$\cos\alpha=\frac{8}{\sqrt{73}}$とする。

すると，$0\leqq\theta\leqq2\pi$から，$-\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}\leqq\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq\frac{\sqrt{73}}{6}-\frac{1}{2}$

[解 説]

1次変換の基本題です。(2)は，問題文から結論が推測できます。

2

問題のページへ

(1)　$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ に対し，条件より，

$P(3)=10-6p$ ………①，$P(a)=0$ ………②

②より，$P(x)$ を $x-a$ で割ると，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

ここで，$P(x)=0$ の実数解は a のみより，$x^2-2px+1=0$ が重解 $x=a$ をもつ場合を考えると，

(i)　$a=p=1$ のとき

$P(x)=(x-1)^3$ となり，$P(3)=8$ から，①を満たさない。

(ii)　$a=p=-1$ のとき

$P(x)=(x+1)^3$ となり，$P(3)=64$ から，①を満たさない。

(i)(ii)より，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)　(1)より，$x^2-2px+1=0$ は虚数解をもつことより，

$D/4=p^2-1<0$，$-1<p<1$ ………③

①より，$(3-a)(9-6p+1)=10-6p$

③から $10-6p\neq 0$ なので，$3-a=1$ となり，$a=2$

(3)　(2)より，$P(x)=x^3-(2p+2)x^2+(4p+1)x-2$ となり，

$P'(x)=3x^2-2(2p+2)x+(4p+1)$

関数 $y=P(x)$ が極値をもたない条件は，つねに $P'(x)\geqq 0$ であることより，

$D/4=(2p+2)^2-3(4p+1)\leqq 0$，$4p^2-4p+1\leqq 0$

これより，$(2p-1)^2\leqq 0$ となり，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

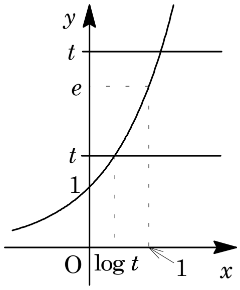
なお，この値は③を満たしている。

[解 説]

剰余の定理と微分法の応用を組み合わせた問題です。なお，(1)は用心深く書いていますが，冒頭の 3 行だけでも構わないでしょう。

3

問題のページへ



(1)　$xe^x = tx$ ……(＊)より，$x=0$ または $e^x = t$ である。

　$0 \leqq x \leqq 1$ における(＊)の解は, $t>1$ に注意して,

(i)　$1<t \leqq e$ のとき　$x=0,\ \log t$

(ii)　$t>e$ のとき　$x=0$

(2)　$S(t)=\int_0^1 |\,xe^x - tx\,|\,dx = \int_0^1 x|\,e^x - t\,|\,dx$ に対して,

(i)　$1<t \leqq e$ のとき

$$S(t) = -\int_0^{\log t}(xe^x - tx)\,dx + \int_{\log t}^1 (xe^x - tx)\,dx$$

$$= -\left[xe^x\right]_0^{\log t} + \int_0^{\log t} e^x dx + \frac{t}{2}\left[x^2\right]_0^{\log t} + \left[xe^x\right]_{\log t}^1 - \int_{\log t}^1 e^x dx - \frac{t}{2}\left[x^2\right]_{\log t}^1$$

$$= -t\log t + (t-1) + \frac{t}{2}(\log t)^2 + e - t\log t - (e-t) - \frac{t}{2}\left\{1-(\log t)^2\right\}$$

$$= t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1$$

(ii)　$t>e$ のとき

$$S(t) = -\int_0^1 (xe^x - tx)\,dx = -\left[xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx + \frac{t}{2}\left[x^2\right]_0^1$$

$$= -e + (e-1) + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - 1$$

(3)　(i)　$1<t \leqq e$ のとき

$$S'(t) = (\log t)^2 + 2t(\log t)\cdot\frac{1}{t} - 2\log t - 2 + \frac{3}{2} = (\log t)^2 - \frac{1}{2}$$

　$1<t \leqq e$ において，$S'(t)=0$ の解は $t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ となり，$S(t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{2}$	↘		↗	$\frac{e}{2}-1$

(ii)　$t>e$ のとき

　(2)より，$S(t) > \frac{e}{2} - 1$

(i)(ii)より，$S(t)$ を最小にする t は，$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ である。

[解 説]

　定積分の計算問題です。いったん不定積分を求めておいた方が, 計算上, よかったかもしれません。

4

問題のページへ

(1)　勝者が 3 人であるのは, 3 人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は,

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　$n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3C_2=3$ 通り。次に, 得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3C_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ は,

$$P_3(2)=\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3)　勝者が 2 人である確率は, (2)と同様に考えると,

$$P_n(2)=\frac{{}_3C_2\times{}_nC_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて,

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

(4)　条件より，$P_n(1)\geqq0.9$ から，$\dfrac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}\geqq\dfrac{9}{10}$ となり,

$$5(2n-1)(n-1)\geqq9n^2,\ \ n^2-15n+5\geqq0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=x^2-15x+5=\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+5-\left(\frac{15}{2}\right)^2$ とおくと,

$$f(0)=5>0,\ \ f(1)=-9<0$$

よって，$f(14)<0$，$f(15)>0$ となり, (*)を満たす最小の n は $n=15$ である。

[解 説]

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。なお, (4)は 2 次関数のグラフをイメージして解いています。また，この設問のみ，理系単独です。

5

問題のページへ

(1)　条件より, $k,\ l$ を 0 以上の整数として，$x=4k+1$，$y=4l+1$ と表すと,

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって，積 xy は 4 で割ると 1 余り，集合 A に属する。

(2)　条件より，$m=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき，二項定理より,

$$3^m=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より，3^m は 4 で割ると 1 余る。

なお，$m=0$ のときは $3^m=1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より，3^m は A に属する。

(3)　まず, (2)と同様に考え，$m+n$ が偶数の場合は, $M,\ N$ を整数として,

(i)　$m=2k$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l}=9^k49^l=(8+1)^k(48+1)^l=(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

(ii)　$m=2k+1$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l+1}=3(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

次に，$m+n$ が奇数の場合は,

(iii)　$m=2k$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l+1}=(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(iv)　$m=2k+1$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l}=3(4M+1)(4N+1)=3(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(4)　$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数は，$0\leqq k\leqq 2m+1$，$0\leqq l\leqq 2n+1$ として 3^k7^l と表せ，この中で A に属する数は，(3)の結果から $k+l$ が偶数の場合である。この数全体の和を S とすると,

$$\begin{aligned}S&=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+(3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1})\\&=(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})+21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})\\&=22\cdot\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1}=\frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)\end{aligned}$$

[解 説]

整数についての問題で，(2)までは実質的に文理共通です。(1)と(2)が(3)の，そして(3)が(4)の誘導になっています。