1

問題のページへ

(1)　命題「すべての 2 行 2 列の行列 A, B に対して，$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ が成立する」は偽である。

反例は，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)　命題「E を単位行列とするとき，2 行 2 列の行列 A が $A^2 = E$ を満たすならば，$A = E$ または $A = -E$ である」は偽である。

反例は，$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(3)　命題「微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a) = 0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x = a$ において極値をとる」は偽である。

反例は，$f(x) = x^3$，$a = 0$

(4)　命題「n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある」は真である。

証明は以下のようになる。

$1+2+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ から，n，$n+1$ の一方は偶数，もう一方は奇数であり，$1+2+\cdots+n$ は奇数の約数をもつ。

$n \geqq 2$ から最小の奇数は 3 となり，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[解 説]

命題の真偽の問題ですが，判定がすべて偽とはならないように配慮してあります。なお, (3)と(4)は文理共通です。

2

問題のページへ

(1)　△ABC が二等辺三角形であるとき，点 C$(x,\ y)$ の存在範囲は，$y>0$ において，

(i)　AC＝BC のとき

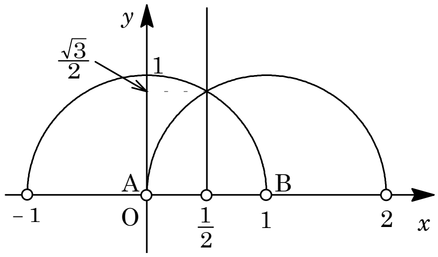
点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x=\dfrac{1}{2}$ 上にある。

(ii)　AB＝AC のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

(iii)　BC＝BA のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より，点 C は右上図の円または直線上にある。

(2)　△ABC が鋭角三角形である条件は，

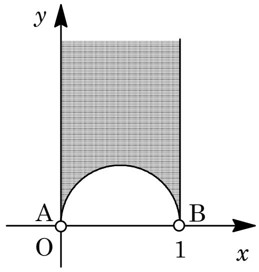
$$\angle CAB<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \angle ABC<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \angle BCA<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$y>0$ において，①②③がすべて成立する点 C$(x,\ y)$ の存在範囲を求める。

①より，点 C は y 軸の右側，すなわち領域 $x>0$ にある。

②より，点 C は直線 $x=1$ の左側，すなわち領域 $x<1$ にある。

③より，点 C は AB を直径とする円の外部，すなわち領域 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$ にある。



①②③より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，境界は領域に含まない。

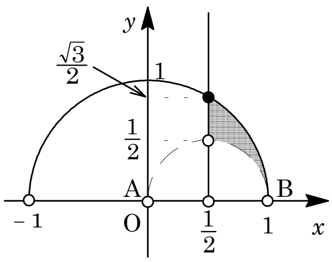
(3)　まず，$\alpha=\angle CAB<\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\angle ABC<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma=\angle BCA<\dfrac{\pi}{2}$ より，点 C は(2)の領域内に存在する。

ここで，条件から，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ なので，三角形の角と辺の大小関係を用いると，

$$BC\leqq AC\leqq AB$$

すると，BC≦AC から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ にある。

また，AC≦AB から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x^2+y^2\leqq 1$ にある。

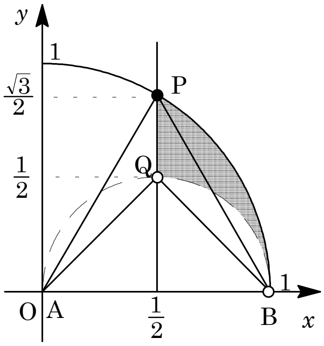


以上より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，破線の境界は領域に含まない。

(4)　まず，点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とおくと，△ABP は正三角形となるので，$\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{3}$である。

また，AB を直径とする円周上に点 Q をとると，$\angle\mathrm{AQB}=\frac{\pi}{2}$である。

すると，点 C が右図の網点部に存在するとき，線分 AB を弦とする円弧を考え，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}$ のとりうる値を求めると，右図より，$\frac{\pi}{3}\leqq\gamma<\frac{\pi}{2}$である。

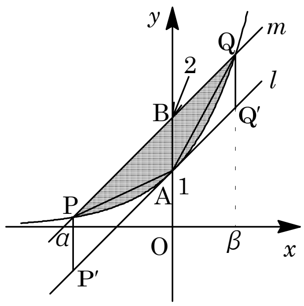


[解 説]

巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく，図形的に解くと，スッキリした解になります。

3

問題のページへ



(1)　平行四辺形PP′Q′Qの面積 S は,

$$S = 1\times(\beta-\alpha) = \beta-\alpha$$

(2)　$y = e^x$ ……①より，$y' = e^x$ となり，A$(0,\ 1)$ における接線 l の方程式は，$y = x+1$ となる。

また，B$(0,\ 2)$ を通り l に平行な直線 m は,

$$y = x+2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$e^x = x+2$

この方程式の2つの解が $x=\alpha$，β より,

$$e^\alpha = \alpha+2 \cdots\cdots\cdots ③,\quad e^\beta = \beta+2 \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は,

$$T = \int_\alpha^\beta (x+2-e^x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(e^\beta-e^\alpha)$$

③④より，$e^\beta - e^\alpha = (\beta+2)-(\alpha+2) = \beta-\alpha$ となり,

$$T = \frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha) = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

(3)　$T<S$ より，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2) < \beta-\alpha$ となり，$\beta-\alpha>0$ から,

$$\alpha+\beta+2<2,\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

これより，線分PQの中点 $\mathrm{R}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{e^\alpha+e^\beta}{2}\right)$ は，第2象限にある。

(4)　$y=e^x$ に対し，$y''=e^x>0$ から，曲線は下に凸になるので,

$$T > \triangle\mathrm{APQ} = \frac{1}{2}S$$

よって，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2) > \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ から,

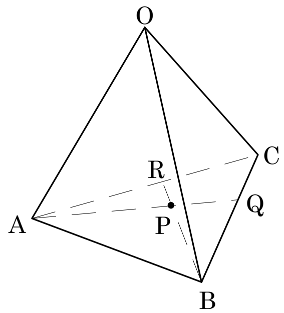
$$\alpha+\beta+2>1,\quad \alpha+\beta>-1$$

[解 説]

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

4

問題のページへ



(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$であり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

すると，$\vec{p}\cdot\vec{a}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=4s+t$$

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=s+t$$

(2)　条件より，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$から，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\cos\angle\mathrm{BOP}=\cos\angle\mathrm{COP}$$

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{|\vec{p}||\vec{a}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{|\vec{p}||\vec{b}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{c}}{|\vec{p}||\vec{c}|}$$

(1)の結果を用いると，$\dfrac{4(1-s-t)}{2}=\dfrac{4s+t}{2}=s+t$から，

$$4(1-s-t)=4s+t\ \cdots\cdots\cdots①,\ 4s+t=2(s+t)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{4}{9}$

(3)　$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$より，$\vec{p}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$となり, (2)から,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とおくと，③から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

Q は直線 BC 上にあるので，$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$から$k=\dfrac{3}{2}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AP}}$とおくと，③から，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\left(1-\dfrac{7}{9}l\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

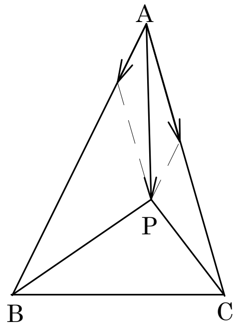
R は直線 AC 上にあるので，$1-\dfrac{7}{9}l=0$から$l=\dfrac{9}{7}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$$

(4)　$\triangle\mathrm{ABP}$，$\triangle\mathrm{BCP}$，$\triangle\mathrm{CAP}$の面積比は，③より，

$$\frac{4}{9}:\left(1-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right):\frac{2}{9}=4:3:2$$

これより, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積比は, 4 : 3 : 2 である。



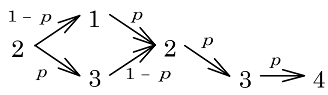
[解 説]

空間ベクトルの有名問題です。なお, ③式の係数に$\triangle\mathrm{ABC}$ との面積比が明示されていますので, (4)では, (3)の結果を利用しない方がストレートです。

5

問題のページへ

(1)　A の持っている金貨の枚数に注目する。4 回の対戦で，A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，A の枚数が右図のように変化する場合であり，その確率 P_4 は，



$$P_4 = 2p(1-p)\cdot p^2 = 2p^3(1-p)$$

(2)　$2n-1$ 回の対戦で，A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-3$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後，A が 2 回続けて勝つ場合である。

ところが，A の枚数が 2 となるのは，偶数回の対戦の後だけであるので，このような場合はない。よって，この確率 P_{2n-1} は，$P_{2n-1} = 0$ である。

(3)　$2n$ 回の対戦で，A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-2$ 回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後，A が 2 回続けて勝つ場合である。この確率 P_{2n} は，

$$P_{2n} = \{2p(1-p)\}^{n-1}\cdot p^2 = p^2\{2p(1-p)\}^{n-1}$$

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n は，

$$S_n = P_2 + P_4 + \cdots + P_{2n} = \frac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)} = \frac{p^2 - p^2(2p(1-p))^n}{1-2p+2p^2}$$

(5)　$2p(1-p) = -2p^2 + 2p = -2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ より，$0<p<1$ で，$0<2p(1-p) \leqq \frac{1}{2}$

これより，$n\to\infty$ のとき，$(2p(1-p))^n \to 0$ となることより，

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{p^2}{1-2p+2p^2}$$

すると，$S - p = \dfrac{p^2}{1-2p+2p^2} - p = \dfrac{p(-2p^2+3p-1)}{1-2p+2p^2} = \dfrac{p(1-p)(2p-1)}{1-2p+2p^2}$

よって，$0<p<\frac{1}{2}$ のとき $S<p$，$p=\frac{1}{2}$ のとき $S=p$，$\frac{1}{2}<p<1$ のとき $S>p$

[解 説]

(1)で具体的に考えた結果を一般化すれば，(4)の結論まで一直線です。なお，この(4)までは文理共通です。