$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　すべての 2 行 2 列の行列 A，B に対して，$(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$ が成立する。

(2)　2 行 2 列の行列 A が $A^2=E$ を満たすならば，$A=E$ または $A=-E$ である。ただし E は単位行列とする。

(3)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

2

解答解説のページへ

座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) △ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) △ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角∠CAB，∠ABC，∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式

$$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \frac{\pi}{2}$$

を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

曲線 $y=e^x$ 上の点 A$(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 B$(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β (ただし $\alpha<\beta$) とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P$'$，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q$'$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形 PP$'$Q$'$Q の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。

$\boxed{4}$

解答解説のページへ

四面体 OABC において $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき, s, t の値を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$ および $\mathrm{AR}:\mathrm{RC}$ を求めよ。

(4)　(2)の条件を満たす点 P について, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。

5

解答解説のページへ

2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ とする。p と S の大小関係を調べよ。