

1

問題のページへ

(1) 「 $A^3 = O$ ならば $A = O$ 」は誤り。反例は、 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

「 $A = O$ ならば $A^2 = O$ 」は正しい。

(2) $A^3 = O$ のとき、 A^{-1} が存在すると仮定し、 $A^3 = O$ に左からかけると、
 $A^{-1}A^3 = A^{-1}O$ 、 $A^2 = O$

さらに、 $A^{-1}A^2 = A^{-1}O$ とすると、 $A = O$ となり、 A^{-1} が存在するという仮定に反する。

よって、 $A^3 = O$ のとき、 A は逆行列をもたない。

(3) $A^3 = O$ のとき、(2)より、 A^{-1} は存在しないので、 $ad - bc = 0$
 これより、与えられた式から、 $A^2 = (a+d)A \dots\dots(*)$ となり、

$$A^3 = (a+d)A^2 = (a+d)^2 A$$

$A^3 = O$ から、 $a+d=0$ または $A=O$ である。

(i) $a+d=0$ のとき (*)より、 $A^2 = O$ となる。

(ii) $A=O$ のとき $A^2 = O$ である。

(i)(ii)より、 $A^3 = O$ ならば $A^2 = O$ である

[解 説]

べき零行列に関する定理の証明です。同じ問題が、誘導なしの形式でも、過去に何度も出ています。

2

問題のページへ

(1) $0 < x < 1$ において, $f(x) = \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-x}{(n+1)(n+x)} > 0$$

よって, $f(x) > f(0) = 0$

また, $0 < x < 1$ において, $g(x) = \frac{x}{n} - \log\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} > 0$$

よって, $g(x) > g(0) = 0$

以上より, $0 < x < 1$ において, $\frac{x}{n+1} < \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) < \frac{x}{n}$

(2) 区間 $0 < x < 1$ を n 等分して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

(3) $a_n = \left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right)\left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) \cdots \left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right)$ のとき,

$$\log a_n = \log\left(1 + \frac{1^5}{n^6}\right) + \log\left(1 + \frac{2^5}{n^6}\right) + \cdots + \log\left(1 + \frac{n^5}{n^6}\right) = \sum_{k=1}^n \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで, $x = \left(\frac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0 < x < 1$ となり, (1) より,

$$\frac{1}{n+1} \left(\frac{k}{n}\right)^5 < \log\left(1 + \frac{k^5}{n^6}\right) < \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^5, \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 < \log a_n < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2) より, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^5 = 1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \frac{1}{6}$$

すると, 対数関数は定義域で連続であることより, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{\frac{1}{6}}$ となる。

[解 説]

基本的で, しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも, (3)への誘導が, 無理のない形になっており, 演習する価値のある 1 題です。

3

問題のページへ

- (1) 石は、時刻 $t=0$ で点 A にあるので、時刻 $t=1$ においても点 A にある確率 p_1 は、規則(a)より、 $p_1 = c$ である。

また、時刻 $t=1$ において、石が点 B にある確率は $1-p_1$ より、

$$p_2 = cp_1 + (1-2c)(1-p_1) = c^2 + (1-2c)(1-c) = 3c^2 - 3c + 1$$

- (2) 石が時刻 $t=n$ に点 A にあるとき、時刻 $t=n+1$ にも点 A にある確率は c 、また時刻 $t=n$ に点 B にあるとき、時刻 $t=n+1$ に点 A にある確率は $1-2c$ より、

$$p_{n+1} = cp_n + (1-2c)(1-p_n) = (3c-1)p_n + (1-2c) \dots\dots\dots (*)$$

- (3) (*)を変形すると、 $p_{n+1} - \frac{1-2c}{2-3c} = (3c-1)\left(p_n - \frac{1-2c}{2-3c}\right)$

また、 $p_0 = 1$ としたとき、 $n=0$ のときも(*)は成立することより、

$$p_n - \frac{1-2c}{2-3c} = \left(p_0 - \frac{1-2c}{2-3c}\right)(3c-1)^n = \frac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$$

$$\text{よって、 } p_n = \frac{1-2c}{2-3c} + \frac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$$

- (4) $0 < c < \frac{1}{2}$ より $-1 < 3c-1 < \frac{1}{2}$ となり、 n のとき、 $(3c-1)^n \rightarrow 0$ であるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1-2c}{2-3c}$$

[解 説]

有名な漸化式の確率への応用で、その中でも、最も基本的なタイプです。文系に類題が出ています。なお、(3)では、計算を容易にするため、 p_0 を初期値としています。

4

問題のページへ

$$(1) \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos 120^\circ = -1 \text{ より,}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 2$$

$$(2) \quad |k\vec{a} + l\vec{b}|^2 = k^2|\vec{a}|^2 + 2kl\vec{a} \cdot \vec{b} + l^2|\vec{b}|^2 = 2(k^2 - kl + l^2)$$

よって、 k, l は整数より、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は偶数である。

(3) (i) k が奇数、 l が奇数のとき

k^2, kl, l^2 はすべて奇数より、 $k^2 - kl + l^2$ は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(ii) k が奇数、 l が偶数のとき

k^2 は奇数、 kl, l^2 は偶数より、 $k^2 - kl + l^2$ は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(iii) k が偶数、 l が奇数のとき

k^2, kl は偶数、 l^2 は奇数より、 $k^2 - kl + l^2$ は奇数となるので、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(i) ~ (iii) より、 k または l が奇数のとき、 $|k\vec{a} + l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではない。

(4) まず、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ が整数ならば、 $m = n = 0$ を証明する。

$|m\vec{a} + n\vec{b}| = \sqrt{2(m^2 - mn + n^2)}$ が整数となるためには、(3)より、 $m^2 - mn + n^2$ が偶数、すなわち m, n がともに偶数であることが必要である。

そこで、 $m = 2m_1, n = 2n_1$ (m_1, n_1 は整数) とおくと、

$$|m\vec{a} + n\vec{b}| = 2\sqrt{2(m_1^2 - m_1n_1 + n_1^2)}$$

すると、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ が整数となるためには、 m_1, n_1 がともに偶数であることが必要であり、 $k=1, 2, \dots$ として、 $m_k = 2m_{k+1}, n_k = 2n_{k+1}$ (m_k, n_k は整数) とおくと、

$$|m\vec{a} + n\vec{b}| = 2^k \sqrt{2(m_k^2 - m_k n_k + n_k^2)}$$

これより、 m_k, n_k がともに偶数であるのは、 $m = n = 0$ の場合しかありえない。よって、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ が整数ならば、 $m = n = 0$ である。

この命題の対偶をとると、 $m = n = 0$ ではないならば、 $|m\vec{a} + n\vec{b}|$ は整数ではない。

[解 説]

(4)は、0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと、いつかは奇数になるということを利用しています。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

5

問題のページへ

(1) $Q_1P_2 = P_1Q_1 \cos \theta$, $P_2Q_2 = Q_1P_2 \cos \theta$ より,

$$P_2Q_2 = P_1Q_1 \cos^2 \theta, \quad \frac{P_2Q_2}{P_1Q_1} = \cos^2 \theta$$

(2) $P_1Q_1P_2$ と $P_2Q_2P_3$ は相似なので, (1)より,

$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^4 \theta$$

(3) $P_1Q_1 = OP_1 \sin \theta = \sin \theta$ より,

$$S_1 = \frac{1}{2} P_1Q_1 \cdot Q_1P_2 \sin \theta = \frac{1}{2} \sin^3 \theta \cos \theta$$

(2)と同様にして, $S_{n+1} = S_n \cos^4 \theta$ となり, $0 < \cos^4 \theta < 1$ から,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1 - \cos^4 \theta} = \frac{\sin^3 \theta \cos \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)(1 - \cos^2 \theta)} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{2(1 + \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin 2\theta}{2\left(1 + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)} = \frac{\sin 2\theta}{2(3 + \cos 2\theta)} \end{aligned}$$

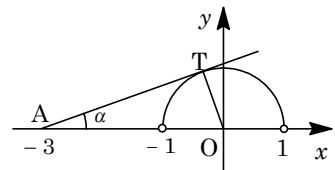
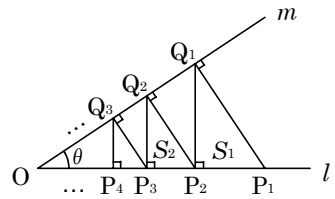
(4) $m = \frac{\sin 2\theta}{3 + \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta - (-3)}$ とおくと, $0 < 2\theta < \pi$ より, m は点 $A(-3, 0)$ と半

円 $x^2 + y^2 = 1$ ($y > 0$) 上の点を結ぶ直線の傾きになる。

ここで, m の値が最大となるのは, この直線が円に接するときであり, 接点を T とし, x 軸の正の部分となす角を α とおくと,

$$\tan \alpha = \frac{OT}{AT} = \frac{1}{\sqrt{3^2 - 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって, (3)より $S = \frac{1}{2} m$ なので, S の最大値は, $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ である。



[解 説]

有名な構図の頻出問題です。(4)では, 微分法の利用が一般的ですが, ここでは分数関数を直線の傾きとしてみる解法を採用しました。