1

解答解説のページへ

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$を 2×2 行列，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$を零行列，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$を単位行列とする。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つことを示せ」という問題に対して，次のような解答があった。

「$A^3=O$ ならば $A=O$ ………①
$A=O$ ならば $A^2=O$ ………②
①②によって，$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ」

この解答には誤りがある。解答中の①，②のそれぞれについて，正しいかどうかを判定し，正しくない場合は正しくないことを示す例（反例）をあげよ。

(2) $A^3=O$ のとき, A は逆行列をもたないことを示せ。

(3) 「$A^3=O$ ならば $A^2=O$ が成り立つ」ことを証明せよ。ただし，等式

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

が成り立つことは証明なしで用いてよい。

$\boxed{2}$ 　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式

$$\frac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqq \frac{x}{n}$$

が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　次の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(3)　数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \left(1+\frac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right)$$

で定めるとき，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

2 点 A, B と, その上を動く 1 個の石がある。この石は, 時刻$t=0$では点 A にあり, その後, 次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各$t=0$, 1, 2, … に対して,

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば, 時刻$t+1$に石が点 A にある確率は c, 点 B にある確率は$1-c$である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば, 時刻$t+1$に石が点 B にある確率は $2c$, 点 A にある確率は$1-2c$である。

ただし, c は$0<c<\frac{1}{2}$を満たす定数とする。

いま, n を自然数とし, 時刻$t=n$において石が点 A にある確率を p_n とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　p_1, p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

(4)　$\lim\limits_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, その大きさがともに$\sqrt{2}$であり, なす角が$120°$である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$を求めよ。

(2) $k,\ l$を整数とするとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は偶数であることを示せ。

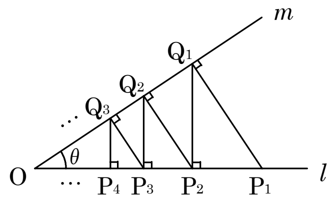
(3) (2)で, kまたはlが奇数のとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は4の倍数ではないことを示せ。

(4) $m,\ n$が整数であり, $m=n=0$ではないならば, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$は整数ではないことを示せ。

5

解答解説のページへ

右図のように，点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め，$\mathrm{P_1}$ から m に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし，$\mathrm{Q_1}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし，$\mathrm{P_2}$ から m に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし，$\mathrm{Q_2}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。



同様にくりかえして，点 P_n，Q_n ($n=1$, 2, 3, 4, …) を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4) (3)で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。