$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$x_n + y_n = 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 1$のとき　条件から$x_1 + y_1 = 1$より，成立する。

(ii)　$n = k$のとき　$x_k + y_k = 1$と仮定する。

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_k + by_k \\ cx_k + dy_k \end{pmatrix}$$

すると，$a + c = b + d = 1$より，

$$x_{k+1} + y_{k+1} = (a + c)x_k + (b + d)y_k = x_k + y_k = 1$$

よって，$n = k + 1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数nで，$x_n + y_n = 1$である。

(2)　(1)より，$y_n = 1 - x_n$となり，

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1} = ax_{n-1} + b(1 - x_{n-1}) = (a - b)x_{n-1} + b$$

ここで，$\alpha = (a - b)\alpha + b$とおくと，$(1 - a + b)\alpha = b$

さて，$1 - a + b = c + b > 0$ より，$\alpha = \dfrac{b}{1 - a + b}$となり，

$$x_n - \frac{b}{1 - a + b} = (a - b)\left(x_{n-1} - \frac{b}{1 - a + b}\right)$$

よって，$x_n - \dfrac{b}{1 - a + b} = \left(x_1 - \dfrac{b}{1 - a + b}\right)(a - b)^{n-1}$ より，

$$x_n = \left(x_1 - \frac{b}{1 - a + b}\right)(a - b)^{n-1} + \frac{b}{1 - a + b}$$

(3)　$a > 0$，$b > 0$，$c = 1 - a > 0$，$d = 1 - b > 0$ より, $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ となり，

$$-1 < a - b < 1$$

よって, $n \to \infty$のとき，$(a - b)^n \to 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{b}{1 - a + b}$$

[解 説]

誘導つきで連立漸化式を解く基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$となる。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/\!/\vec{u}$より, sを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$，$(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$x=-s+2$，$y=2s$，$z=5s$………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}/\!/\vec{v}$より, tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$，$(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$x=t$，$y=t-1$，$z=t$………②

①②より，$-s+2=t$……③，$2s=t-1$……④，$5s=t$……⑥

③④より，$t=\dfrac{5}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$となり，この値は⑥を満たす。

よって，①より$x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{5}{3}$となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$から，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$-\dfrac{5}{3}+3\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}-c=0$，$c=2$

よって，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$となる。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$より，

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

よって, Pは3点A, B, Cの定める平面上にある。

[解 説]

(3)では, x成分, y成分より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$の係数をそれぞれ定め，その後, z成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。なお，文系で，(3)の設問形式の異なるだけの類題が出ています。

3

問題のページへ

(1)　$f(\sqrt{7})=\dfrac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}=\dfrac{\sqrt{7}(8+3\sqrt{7})}{3\sqrt{7}+8}=\sqrt{7}$

(2)　$f(x)-2=\dfrac{8x+21}{3x+8}-2=\dfrac{2x+5}{3x+8}$ より, $x\geqq 0$ のとき $f(x)-2\geqq 0$ である。

よって, $x\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 2$ である。

(3)　$x\geqq 2,\ y\geqq 2$ のとき,

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{8x+21}{3x+8}-\frac{8y+21}{3y+8}\right|$$
$$=\frac{|(8x+21)(3y+8)-(3x+8)(8y+21)|}{(3x+8)(3y+8)}=\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}$$

ここで, $(3x+8)(3y+8)\geqq 14^2>100$ より,

$$\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}\leqq\frac{|x-y|}{100}$$

よって, $|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{|x-y|}{100}$ ………①

(4)　(1)(2)より, $x\geqq 2$ のとき $f(x)\geqq 2$, $f(\sqrt{7})=\sqrt{7}\geqq 2$ なので, ①より,

$$|f(f(x))-f(f(\sqrt{7}))|\leqq\frac{|f(x)-f(\sqrt{7})|}{100}\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$$

ここで, $f(f(\sqrt{7}))=f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ より,

$$|f(f(x))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて, ②に $x=2$ を代入すると,

$$|f(f(2))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|2-\sqrt{7}|}{10000}<\frac{1}{10000}=10^{-4}$$

よって, 求める有理数 r の 1 つは, $r=f(f(2))=f\left(\dfrac{37}{14}\right)=\dfrac{590}{223}$

[解 説]

$\sqrt{7}$ の近似値を求める問題です。きめ細かい誘導のために, 解の流れは明快です。

4

問題のページへ

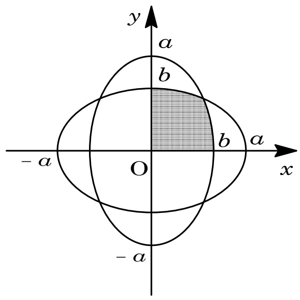
(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

すると，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

よって，$0<\alpha+\beta<\pi$ から，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$



(2)　$A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より，

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots①$$

$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=0$

$0<b<a$ より，$x^2=y^2$ となり，①に代入して，

$$(a^2+b^2)x^2=a^2b^2,\quad x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$x>0$, $y>0$ となるのは，$x=y=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のときで，第 1 象限にある A と B の交点の座標は，$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$となる。

(3)　楕円 A の第 1 象限の部分は，①より，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

さて，楕円 A と B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq0$, $y\geqq0$ の範囲にある部分は，直線 $y=x$ に関して対称であるので，その面積 S は，

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

ここで，$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a\sin\beta$ であり，$x=a\sin\theta$ とおくと，

$$\int_0^{a\sin\beta}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\beta}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\beta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\beta}(1+\cos2\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\beta}$$

$$=\frac{a^2}{2}\beta+\frac{a^2}{4}\sin2\beta$$

以上より，$S=\dfrac{2b}{a}\left(\dfrac{a^2}{2}\beta+\dfrac{a^2}{4}\sin 2\beta\right)-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta+ab\sin\beta\cos\beta-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

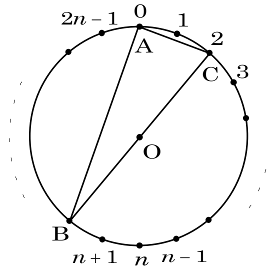
$$=ab\beta+ab\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta$$

[解 説]

楕円が境界線となっている図形の面積を求める問題です。直線 $y=x$ に関して対称であることに気付けば，積分が 1 回で済みます。

5

問題のページへ



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は,

$(B,\ C)=(n+1,\ 1),\ (n+2,\ 2),\ \cdots,\ (2n-1,\ n-1)$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

(2)　辺 AB 上に点 O がある場合は,

$(B,\ C)=(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ n-1)$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

また, 辺 AC 上に点 O がある場合は,

$(B,\ C)=(n+1,\ n),\ (n+2,\ n),\ \cdots,\ (2n-1,\ n)$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

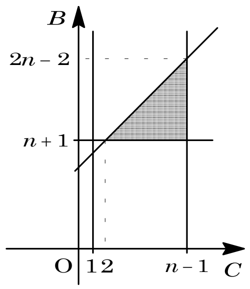
以上より, (1)の場合も考え合わせて，△ABC の辺上に点 O がある確率は,

$$\frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\frac{6(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}$$

(3)　△ABC の内部に点 O がある場合は,

$1\leqq C\leqq n-1,\ n+1\leqq B\leqq n+C-1$

この不等式を CB 平面上に図示すると，右図の網点部となる。この領域内にある格子点$(C,\ B)$の個数は,



$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって，この場合の確率は, $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$

(4)　X の期待値を E とすると,

$$E=1\times\frac{3}{2n-1}+2\times\frac{n-2}{2(2n-1)}+0\times\left\{1-\frac{3}{2n-1}-\frac{n-2}{2(2n-1)}\right\}=\frac{n+1}{2n-1}$$

[解　説]

たびたび出題されている確率の有名問題です。(3)では，格子点の個数を対応させて数えています。