1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ d$ は $a+c=b+d=1$ を満たす正の定数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。さらに，$x_1+y_1=1$ を満たす実数 x_1，y_1 に対し，x_n，y_n $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を漸化式

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

によって帰納的に定める。

(1)　$x_n+y_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であることを示せ。

(2)　x_n をまず $a,\ b,\ x_{n-1}$ で表し，次に $a,\ b,\ x_1$ で表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標空間の 2 点 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ -1,\ 0)$, および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{BP}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し, $\overrightarrow{CP}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $C(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し, P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2) $x\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 2$ であることを示せ。

(3) $x\geqq 2,\ y\geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4) $x\geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right|\leqq\dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。

4

解答解説のページへ

$0<b<a$ を満たす定数 $a,\ b$ に対し, 2 つの楕円

$$A:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad B:\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

を考える。また α, β は, $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

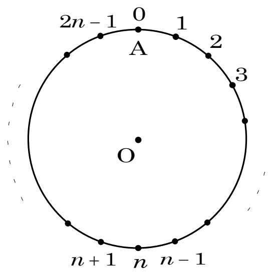
(2)　2 つの楕円 $A,\ B$ の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3)　楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち, $x\geqq 0,\ y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を $a,\ b$, β を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1) 辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2) △ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3) △ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

(4) △ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。