1

問題のページへ

(1) $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$ となり，

$$A^3=A^2A=3A\cdot A=3A^2=9A=\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}$$

(2) A と E は積について交換可能なので，

$$(xA-E)^3=x^3A^3-3x^2A^2+3xA-E=9x^3A-9x^2A+3xA-E$$

条件より，$(xA-E)^3=xA-E$ なので，$9x^3A-9x^2A+3xA-E=xA-E$

$$(9x^3-9x^2+2x)A=O$$

$A\neq O$ から，$9x^3-9x^2+2x=0$，$x(3x-2)(3x-1)=0$

$x>0$ より，$x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$

(3) $x_0=\dfrac{1}{3}$ なので, (2)から，$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^3=\dfrac{1}{3}A-E$ となり，また，

$$\left(\frac{1}{3}A-E\right)^2=\frac{1}{9}A^2-\frac{2}{3}A+E=\frac{1}{3}A-\frac{2}{3}A+E=-\frac{1}{3}A+E$$

これより，$(x_0A-E)^n=p_nA+q_nE$ とおくと，$p_n=-\dfrac{(-1)^n}{3}$，$q_n=(-1)^n$ と推測できる。以下，この推測の正しいことを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$p_1=\dfrac{1}{3}$，$q_1=-1$ となり成立する。

(ii) $n=k$ のとき　$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^k=-\dfrac{(-1)^k}{3}A+(-1)^kE$ と仮定する。

$$\left(\frac{1}{3}A-E\right)^{k+1}=(-1)^k\left(-\frac{1}{3}A+E\right)\left(\frac{1}{3}A-E\right)=(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{3}A-E\right)^2$$

$$=(-1)^{k+1}\left(-\frac{1}{3}A+E\right)=-\frac{(-1)^{k+1}}{3}A+(-1)^{k+1}E$$

(i)(ii)より, $n\geqq 1$ において，$p_n=-\dfrac{(-1)^n}{3}$，$q_n=(-1)^n$ である。

[解 説]

(3)では，$\left(\dfrac{1}{3}A-E\right)^2$ を把握するだけで, (2)から結論を導くことができます。この考え方を用い, n を偶奇に分けて記しましたが，漸化式を立てるという手もあります。

2

問題のページへ

(1) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，$b_n=a_{n+1}+a_n$ より，

$$b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)=2b_n$$

よって，数列$\{b_n\}$は公比 2 の等比数列である。

(2) $b_1=a_2+a_1=3$ より, (1)から，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=3\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=3\cdot\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=1-(-2)^{n-1}$$

(3) $n\geqq 2$ で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(a_{k+1}+a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1}-(-1)^k a_k\}$

$$=(-1)^n a_n-(-1)^1 a_1=(-1)^n a_n+2$$

(2)の結果と合わせて，$(-1)^n a_n+2=1-(-2)^{n-1}$

$$a_n=\frac{-(-2)^{n-1}-1}{(-1)^n}=2^{n-1}+(-1)^{n-1}$$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=2^0+(-1)^0=2$ となり，このときも満たしている。

(4) $\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2^n+(-1)^n}=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ なので，

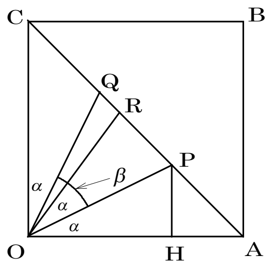
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$$

[解 説]

(3)では，無理をして，(2)を誘導として位置付けて解きましたが，パターン的に解いた方が簡明なのは言うまでもありません。

3

問題のページへ



(1)　まず，一般性を失うことなく，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$ とすることができる。

ここで，P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH}:\mathrm{HA}=\mathrm{CP}:\mathrm{PA}=2:1$ から，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

これより，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4>\sqrt{15}$ より $\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3}>8$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{4}{5}$ となるので，

$$\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5},\quad \cos\alpha>\cos\frac{\pi}{6}>\cos\beta$$

$f(x)=\cos x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少するので，$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ となる。

(3)　(1)から $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$ なので，$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

さて，$\angle\mathrm{ORA}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\dfrac{3}{4}\pi-2\alpha$ から，$\triangle\mathrm{OAR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)},\quad \mathrm{AR}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos 2\alpha-\cos\frac{3}{4}\pi\sin 2\alpha}$$

よって，$\mathrm{AR}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{8}{7\sqrt{2}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{2}$

これより，$\mathrm{RC}=\sqrt{2}-\dfrac{4}{7}\sqrt{2}=\dfrac{3}{7}\sqrt{2}$ となり，$\mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$ である。

[解 説]

ベクトルを利用した設定で，文系に類題が出ていますが，理系ではこの誘導はありません。しかし，そのために逆に発想が制約されず，本問の方が魅力ある問題となっています。

4

問題のページへ

(1)　n 個の玉が入っている袋から，2 個同時に取り出す ${}_n\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしいとすると，$r_1<r_2$，$w_1<w_2$ としても一般性を失わない。

さて, A の面積が 4 であるのは，$(r_2-r_1,\ w_2-w_1)=(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

(i)　$(r_2-r_1,\ w_2-w_1)=(1,\ 4)$ のとき

$r_2=r_1+1$，$w_2=w_1+4$ より，$1\leqq r_1\leqq n-1$，$1\leqq w_1\leqq n-4$ となり，その確率は,

$$\frac{(n-1)(n-4)}{{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}$$

(ii)　$(r_2-r_1,\ w_2-w_1)=(2,\ 2)$ のとき

$r_2=r_1+2$，$w_2=w_1+2$ より，$1\leqq r_1\leqq n-2$，$1\leqq w_1\leqq n-2$ となり，その確率は,

$$\frac{(n-2)(n-2)}{{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{4(n-2)^2}{n^2(n-1)^2}$$

(iii)　$(r_2-r_1,\ w_2-w_1)=(4,\ 1)$ のとき

(i)と同様にして，その確率は，$\dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}$ である。

(i)(ii)(iii)より，$\dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}+\dfrac{4(n-2)^2}{n^2(n-1)^2}+\dfrac{4(n-1)(n-4)}{n^2(n-1)^2}=\dfrac{4(3n^2-14n+12)}{n^2(n-1)^2}$

(2)　$X=|r_1-r_2|=r_2-r_1$ とおくと，$X=k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ となる確率は，(1)と同様に，$1\leqq r_1\leqq n-k$ から，$\dfrac{n-k}{{}_n\mathrm{C}_2}=\dfrac{2(n-k)}{n(n-1)}$ となる。これより, X の期待値 $E(X)$ は,

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot\frac{2(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}(nk-k^2)$$

$$=\frac{2}{n(n-1)}\left\{\frac{1}{2}n^2(n-1)-\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\right\}=\frac{1}{3}n+\frac{1}{3}$$

(3)　$n=7$ のとき, (2)より，$E(X)=\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$

同様に，$Y=|w_1-w_2|$ とおくと，$E(Y)=\dfrac{7}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$ である。

ここで, X と Y は独立なので, A の面積の期待値 $E(XY)$ は,

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{8}{3}\times\frac{8}{3}=\frac{64}{9}$$

[解 説]

(3)は，範囲外の数 C「確率分布」に出てくる公式を用いましたが，これが普通の解法でしょう。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ に対して，$f(-x)=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となる。

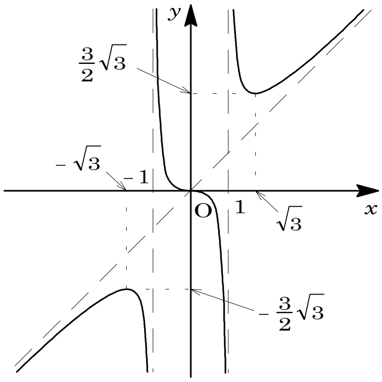
$$f'(x)=1+\frac{(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

よって，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	$\times$	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗

また，$\displaystyle\lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$ より，漸近線 $x=1$，$y=x$ が存在する。

以上より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が 3 個になるのは，対称性から，$x>0$ において交点が 1 個となる場合より，

$$m<0,\ 1<m$$

(3)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の $x>0$ における交点は，

$$x+\frac{x}{x^2-1}=mx,\ 1+\frac{1}{x^2-1}=m,\ x^2=m(x^2-1)$$

よって，$x=\sqrt{\dfrac{-m}{1-m}}$ となり，これを $x=\alpha$ とおくと，求める部分の面積 S は,

$$S=2\int_0^{\alpha}\left(x+\frac{x}{x^2-1}-mx\right)dx=2\left[(1-m)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x^2-1|\right]_0^{\alpha}$$
$$=(1-m)\alpha^2+\log|\alpha^2-1|=-m-\log(1-m)$$

[解 説]

(2)では，$x\neq 0$ で定数 m を分離して考えた方がクリアーですが，次の(3)の設問から判断すると，それには及ばないでしょう。