1

問題のページへ

(1)　$J^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I$ から,

$$J^3=(-I)\cdot J=-J,\ \ J^4=(-I)^2=I$$

(2)　$aI+bJ=\begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-b\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$ より，$(aI+bJ)^{-1}$ が存在する条件は,

$$a^2+b^2\neq 0$$

すなわち，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ である。

(3)　(1)より，$J^2=-I$，$J^3=-J$，$J^4=I$ から,

$$sI+(1+st)J+tJ^2+st^2J^3+t^2J^4=sI+(1+st)J-tI-st^2J+t^2I$$
$$=(s-t+t^2)I+(1+st-st^2)J$$

ここで，$(s-t+t^2)I+(1+st-st^2)J$ に対して，次式を仮定する。

$$s-t+t^2=0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ 1+st-st^2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

このとき，①より $s=t-t^2$ となり，②に代入すると，$1+s^2=0$ となり不成立。

したがって，$(s-t+t^2,\ 1+st-st^2)\neq(0,\ 0)$ となり, (2)から任意の実数 s, t に対して，$(sI+(1+st)J+tJ^2+st^2J^3+t^2J^4)^{-1}$ はつねに存在する。

[解 説]

逆行列についての基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1)　$x^3+ax^2+bx+c=0$ ……(＊)の解の 1 つが純虚数 $x=ki$ $(k\neq 0)$ より，

$$k^3i^3+ak^2i^2+bki+c=0,\ (-ak^2+c)+(-k^3+bk)i=0$$

a, b, c は実数より，

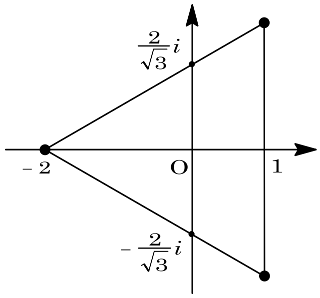
$$-ak^2+c=0\ \cdots\cdots\cdots①,\ -k^3+bk=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$k\neq 0$ から $k^2=b$ となり，①に代入すると，$ab-c=0$ である。

(2)　$x^3+8=0$ より，$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$$x=-2,\ x=1\pm\sqrt{3}i$$

すると，この 3 つの解が表す点を頂点とする三角形は右図のようになる。



また(1)より，(＊)は，$x^3+ax^2+bx+ab=0$ となり，

$$(x+a)(x^2+b)=0,\ x=-a,\ \pm\sqrt{b}i$$

$a>0$ から，$-a=-2$，$\sqrt{b}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって，$a=2$，$b=\dfrac{4}{3}$，$c=ab=\dfrac{8}{3}$

[解 説]

(2)において，(＊)の純虚数解はすぐにわかってしまいます。解と係数の関係を用いるまでもありません。

3

問題のページへ

(1)　駒が左回りに移動する確率は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，右回りに移動する確率は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，動かない確率は$1-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$である。

さて，X_2がAであるのは，駒がA→A→A, A→B→A，またはA→C→Aと移動する場合より，

$$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$$

(2)　最後のX_4のみがAであるのは，X_2，X_3がBまたはCのときである。

まず, Bにある駒が動かないか，またはCに移動する確率は$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$である。

また, Cにある駒が動かないか，またはBに移動する確率も同じく$\dfrac{3}{4}$である。

これより，X_2がBのとき，X_4のみがAである確率は,

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$$

X_2がCのとき，X_4のみがAである確率も$\dfrac{9}{256}$から,

$$Q_4=\frac{9}{256}+\frac{9}{256}=\frac{9}{128}$$

(3)　(2)と同様に考えて，X_2がBのとき，X_nのみがAである確率は,

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

X_2がCのとき，X_nのみがAである確率も$\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-2}$から,

$$Q_n=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

(4)　X_{n+1}がAとなるのは，X_nがAのときは駒が不動であればよいので，その確率は$\dfrac{1}{2}$，またX_nがAでないときは，X_nがBであれば右回り，X_nがCであれば左回りに駒が移動すればよく，その確率はいずれも$\dfrac{1}{4}$なので,

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}(1-P_n)\,,\ \ P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$$

これより，$P_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}\left(P_n-\dfrac{1}{3}\right)$と変形すると，$P_1=\dfrac{1}{2}$から,

$$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

よって，$P_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

[解 説]

(4)の設問で，頭の切換えができるかどうかがポイントです。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ より，$f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-(4x+a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{4x^2+2ax-4}{(x^2+1)^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$で極値をもつことより，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$が必要であり，

$4\cdot\dfrac{1}{4}+2a\cdot\dfrac{1}{2}-4=0$，$a=3$

このとき，$f'(x)=-\dfrac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2}$

$=-\dfrac{2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2}$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$で極大となるので，$a=3$である。

(2)　$f(-2)=-1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ より，$y=f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，最小値は$f(-2)=-1$である。

(3)　$I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{4x+3}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{3}{x^2+1}dx$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}dx=2\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1=2\log 2$

また，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$\int_0^1\frac{3}{x^2+1}dx=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{3}{4}\pi$$

よって，$I=2\log 2+\dfrac{3}{4}\pi$

[解　説]

微分と積分の計算問題です。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ より，

$$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

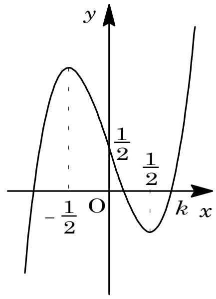
よって，極大値 $\dfrac{3}{2}\left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$，極小値 $-\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$となる。

(2)　公式$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ に，$\theta=\dfrac{2\pi}{9}$ を代入すると，

$$\cos\frac{2\pi}{3}=4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9},\ \ 4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{2}=0$$

よって，$x=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は，方程式$f(x)=0$ の解である。

(3)　$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ より，k は方程式$f(x)=0$ の最大の解である。



ここで，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{16}<0$ なので，右図より$k>\dfrac{3}{4}$ となる。

(4)　$g(x)=\cos x-x$ とおくと，$g'(x)=-\sin x-1\leqq 0$ から，$g(x)$は単調に減少する。

ここで，$3.14<\pi<3.15$，また(3)より$\cos\dfrac{2\pi}{9}>\dfrac{3}{4}$ なので，

$$g\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}-\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}-\frac{2}{9}\times 3.15=0.05>0$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\times 3.14=\frac{\sqrt{2}-1.57}{2}<0$$

よって，$g(x)=0$ すなわち$\cos x=x$ の解はただ 1 つ存在し，それを$x=\alpha$ とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ となる。

[解 説]

3 倍角の公式と 3 次方程式を対応させて，三角関数の値を絞り込む有名な問題です。ただ，誘導が親切なので，過去問の経験がなくても不安は感じないでしょう。