1

問題のページへ

(1)　条件より，$2|z-2| \leqq |z-5|$ ………①，$|z-5| \leqq |z+1|$ ………②

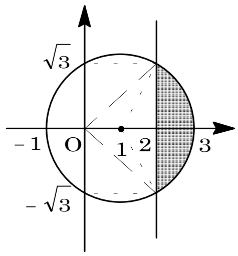
①より，$4|z-2|^2 \leqq |z-5|^2$，$4(z-2)(\bar{z}-2) \leqq (z-5)(\bar{z}-5)$，$z\bar{z}-z-\bar{z} \leqq 3$

$(z-1)(\bar{z}-1) \leqq 4$，$|z-1|^2 \leqq 4$，$|z-1| \leqq 2$

よって，点 z は，点 1 を中心とする半径 2 の円の内部または周上にある。

②より，点 z は，点 5 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 2 を通り実軸に垂直な直線を境界とし，点 5 を含む領域にある。

以上より，①②を満たす図形 D は右図の網点部である。ただし，境界を含む。



(2)　①と②の境界線の交点は $2 \pm \sqrt{3}i$ である。

そこで，$\arg z = \theta$ とするとき，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \tan\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

(3)　D の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\cdot 2^2 \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$$

[解 説]

①の境界線はアポロニウスの円ですが，その知識は用いなくても，普通に計算していけば，結論が導けます。基本的な 1 題です。

2

問題のページへ

(1) $x^2+y^2-4x-2y=0$ より，$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

点$(3,\ 3)$における接線の方程式は,

$$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5,\ x+2y=9$$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)\geqq\log_{\frac{1}{2}}y$……①，$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5)\leqq\log_2 5$……②

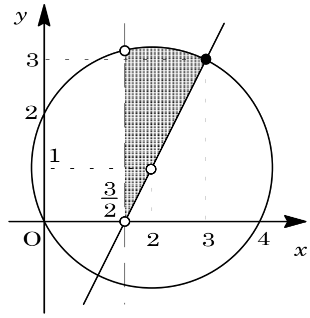
①より，$x>\dfrac{3}{2}$かつ$y>0$として，$2x-3\leqq y$

②より，$x^2+y^2-4x-2y+5>0$として，$x^2+y^2-4x-2y+5\leqq 5$から,

$$(x,\ y)\neq(2,\ 1),\ (x-2)^2+(y-1)^2\leqq 5$$

以上をまとめて, 連立不等式の表す領域を図示すると, 右図の網点部のようになる。

なお, 実線の境界線と黒丸の点は含み, 破線の境界線と白丸の点は含まない。



(3) $ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$ となり，(1)から，点$(3,\ 3)$における接線の傾きが$-\dfrac{1}{2}$より,

(i) $-a\leqq-\dfrac{1}{2}\left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$のとき

kは点$(3,\ 3)$で最大となり，最大値は$k=3a+3$

条件より$3a+3=4$とすると，$a=\dfrac{1}{3}$となるが，$a\geqq\dfrac{1}{2}$を満たさない。

(ii) $-a>-\dfrac{1}{2}\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$のとき

直線$ax+y-k=0$と円$(x-2)^2+(y-1)^2=5$が接する場合にkは最大となり,

$$\frac{|2a+1-k|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5},\ |2a+1-k|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$$

条件より，このとき$k=4$なので，$|2a-3|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$

$$(2a-3)^2=5(a^2+1),\ a^2+12a-4=0$$

$0<a<\dfrac{1}{2}$より，$a=-6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より，$a=-6+2\sqrt{10}$

[解 説]

対数不等式を用いて条件づけられた最大・最小問題で, 昨年の文系第 5 問と同じ題材です。しかし, 解き終えても, あまり疲労を感じません。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$2X-Y=E$ ………①，$XY=O$ ………②

X^{-1} が存在するとき，②より $X^{-1}XY=X^{-1}O$ となり，$Y=O$

①に代入して，$2X=E$，$X=\frac{1}{2}E$

(2) ①より，$Y=2X-E$

②に代入して，$X(2X-E)=O$，$2X^2-X=O$ ………③

さて，$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，X^{-1} が存在しないことより $ad-bc=0$ ………④

すると，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$X^2-(a+d)X=O \quad ⑤$$

③－⑤×2 より，$(2a+2d-1)X=O$

(3) $X\neq O$ より, (2)から $2a+2d-1=0$ ………⑥

④より $ad=bc$，⑥より $a+d=\frac{1}{2}$ なので，解と係数の関係から，a，d は 2 次方程式 $x^2-\frac{1}{2}x+bc=0$ の解である。

$$2x^2-x+2bc=0,\ x=\frac{1\pm\sqrt{1-16bc}}{4}\quad\left(bc\leqq\frac{1}{16}\right)$$

よって，$a=\frac{1\pm\sqrt{1-16bc}}{4}$，$d=\frac{1\mp\sqrt{1-16bc}}{4}$（複号同順）

[解 説]

行列の基本問題です。誘導もていねいです。

4

問題のページへ

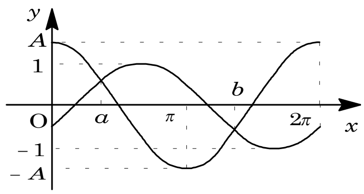
(1)　$\cos b\sin(a-\theta)=\cos a\sin(b-\theta)$ ……①が成り立っているとき,

$$\frac{1}{2}\{\sin(b+a-\theta)-\sin(b-a+\theta)\}=\frac{1}{2}\{\sin(a+b-\theta)-\sin(a-b+\theta)\}$$

$$\sin(b-a+\theta)-\sin(a-b+\theta)=0,\ 2\cos\frac{2\theta}{2}\sin\frac{2b-2a}{2}=0$$

よって, $\cos\theta\sin(b-a)=0$ ………②

(2)　$y=A\cos x$ ……③と $y=\sin(x-\theta)$ ……④の交点が $x=a,\ b$ より,



$$A\cos a=\sin(a-\theta),\ A\cos b=\sin(b-\theta)$$

すると, ①が成立しているので, ②より,

(i)　$\cos\theta=0$ のとき　$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $\theta=\frac{\pi}{2}$ となり, ④は $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

③との交点は, $A\cos x=-\cos x$, $(A+1)\cos x=0$

$A>0$, $0\leqq x\leqq 2\pi$ より, $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$ となり, $b-a=\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}=\pi$

(ii)　$\cos\theta\neq 0$ のとき　②より, $\sin(b-a)=0$

$A>0$ より, $0<a<b<2\pi$ から, $0<b-a<2\pi$ となり, $b-a=\pi$

(3)　$S=\int_a^b\{\sin(x-\theta)-A\cos x\}dx=\Big[-\cos(x-\theta)-A\sin x\Big]_a^b$

$$=-\cos(b-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin b+A\sin a$$

(2)より, $b=\pi+a$ なので,

$$S=-\cos(\pi+a-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin(\pi+a)+A\sin a$$
$$=\cos(a-\theta)+\cos(a-\theta)+A\sin a+A\sin a$$
$$=2\cos(a-\theta)+2A\sin a$$

(4)　(3)より, $S=2(\cos a\cos\theta+\sin a\sin\theta)+2A\sin a$ となり,

$$2\cos\theta\cos a+2(\sin\theta+A)\sin a=S\ \text{………⑤}$$

ここで, (2)より $A\cos a=\sin(a-\theta)$ なので,

$$A\cos a=\sin a\cos\theta-\cos a\sin\theta,\ (\sin\theta+A)\cos a-\cos\theta\sin a=0\ \text{………⑥}$$

⑤⑥より, $\begin{pmatrix}2\cos\theta & 2(\sin\theta+A)\\ \sin\theta+A & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}$

$\Delta=-2\cos^2\theta-2(\sin\theta+A)^2$ とおくと, $0\leqq\theta\leqq\pi$, $A>0$ より, $\Delta<0$ となり,

$$\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-\cos\theta & -2(\sin\theta+A)\\ -(\sin\theta+A) & 2\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}-S\cos\theta\\ -S(\sin\theta+A)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{S}{2\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta+A\end{pmatrix}$$

そこで, $\cos^2a+\sin^2a=1$ より,

$$\frac{S^2\cos^2\theta}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}+\frac{S^2(\sin\theta+A)^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}=1$$

まとめると，$\dfrac{S^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}=1$ となり，

$$S^2=4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}=4(1+2A\sin\theta+A^2)$$

(5)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので, (4)より，S^2 は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大になり，このとき，

$$S^2=4(1+2A+A^2)=4(1+A)^2$$

よって, S は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt{4(1+A)^2}=2(1+A)$ をとる。

[解 説]

(4)は α を消去する問題ですが，ちょうど「もぐらたたき」のように，$\sin\alpha$ を消去すると $\cos\alpha$ が現れ，$\cos\alpha$ を消去すると $\sin\alpha$ が現れるという状況になりました。そこで，迂遠な方法ですが，$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ に代入して消すという基本で解いてみました。時間は，かなりかかりました。

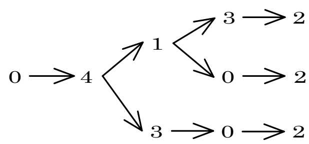
5

問題のページへ

(1)　硬貨を 2 回投げたとき，点 P が目盛り 1 の位置にあるのは，表が 1 回，裏が 1 回出る場合より，$p_2(1) = {}_2\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ である。

硬貨を 3 回投げたとき，点 P が目盛り 2 の位置にあるのは，3 回とも裏が出る場合であり，また点 P が目盛り 3 の位置にあるのは，表が 2 回，裏が 1 回出る場合なので，$p_3(2) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$，$p_3(3) = {}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$ である。

(2)　4 回目に初めて目盛り 2 の位置で止まるのは，1 回目に裏が出て，右図のように点 P の位置が変化する場合より，その確率は，$3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{3}{16}$ である。



(3)　$n+1$ 回目に 0 の位置にあるのは，n 回目には 3 の位置で硬貨を投げて表が出る場合か，n 回目には 1 の位置で硬貨を投げて裏が出る場合のいずれかより，

$$p_{n+1}(0) = p_n(3)\times\frac{1}{2} + p_n(1)\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\{p_n(3)+p_n(1)\}\cdots\cdots\cdots①$$

(4)　①より，$p_{n+1}(1)z = \dfrac{z}{2}\{p_n(4)+p_n(2)\}$，$p_{n+1}(2)z^2 = \dfrac{z^2}{2}\{p_n(0)+p_n(3)\}$

$$p_{n+1}(3)z^3 = \frac{z^3}{2}\{p_n(1)+p_n(4)\},\quad p_{n+1}(4)z^4 = \frac{z^4}{2}\{p_n(2)+p_n(0)\}$$

①と合わせて，両辺の和をとると，

$$p_{n+1}(0)+p_{n+1}(1)z+p_{n+1}(2)z^2+p_{n+1}(3)z^3+p_{n+1}(4)z^4$$

$$= \frac{z^2+z^4}{2}p_n(0)+\frac{1+z^3}{2}p_n(1)+\frac{z+z^4}{2}p_n(2)+\frac{1+z^2}{2}p_n(3)+\frac{z+z^3}{2}p_n(4)$$

さて，$z^5 = 1$ より，$z^4 = z^{-1}$，$z^2 = z^{-3}$ となり，

$$\frac{z^2+z^4}{2} = \frac{z^2+z^{-1}}{2},\quad \frac{1+z^3}{2} = \frac{z(z^{-1}+z^2)}{2},\quad \frac{z+z^4}{2} = \frac{z^2(z^{-1}+z^2)}{2}$$

$$\frac{1+z^2}{2} = \frac{z^3(z^2+z^{-1})}{2},\quad \frac{z+z^3}{2} = \frac{z^4(z^2+z^{-1})}{2}$$

よって，$a_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i$ とおくと，$a_{n+1} = \dfrac{z^2+z^{-1}}{2}a_n\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$a_1 = \displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_1(i)z^i = \dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{2}z^4 = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ となるので，②より，

$$\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i = a_n = a_1\left(\frac{z^2+z^{-1}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{z^2+z^{-1}}{2}\right)^n$$

[解 説]

確率と複素数という一見，畑違いな分野がうまく融合された問題です。