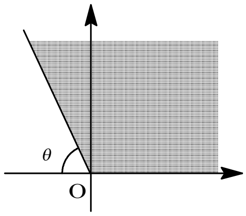
1

問題のページへ

(1)　原点を含み，$0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たす点 z の集合 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi-\theta)$ とおく。

$$\begin{aligned}|z+a|^2 &= |(r\cos\varphi + a) + ir\sin\varphi|^2\\ &= (r\cos\varphi + a)^2 + r^2\sin^2\varphi\\ &= r^2 + 2ra\cos\varphi + a^2\end{aligned}$$

すると，
$$\begin{aligned}|z+a|^2 - |z|^2\sin^2\theta &= r^2 + 2ra\cos\varphi + a^2 - r^2\sin^2\theta\\ &= r^2\cos^2\theta + 2ra\cos\varphi + a^2\\ &\geqq r^2\cos^2\theta + 2ra\cos(\pi-\theta) + a^2\\ &= r^2\cos^2\theta - 2ra\cos\theta + a^2\\ &= (r\cos\theta - a)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって，$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$ が成り立つ。

等号は，$\varphi = \pi-\theta$ かつ $r\cos\theta - a = 0$ のとき成立し，このとき z は，

$$z = \frac{a}{\cos\theta}\{\cos(\pi-\theta) + i\sin(\pi-\theta)\} = \frac{a}{\cos\theta}(-\cos\theta + i\sin\theta) = -a + ia\tan\theta$$

[解 説]

初めは, (2)を図形的に考えようとしました。しかし, z の位置について，場合分けが出てきそうなので止め，式計算で証明をしました。

2

問題のページへ

(1)　$n\pi \leqq x \leqq (n+1)\pi$ において，$1-\cos x \geqq 0$ より，

$$\frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2} \leqq \frac{1-\cos x}{x^2} \leqq \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2}dx \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}dx \leqq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{\pi^2 n^2}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1-\cos x)\,dx = \Big[\,x-\sin x\,\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = \pi$ より，

$$\frac{\pi}{\pi^2(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{\pi}{\pi^2 n^2},\quad \frac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \frac{1}{\pi n^2}$$

(2)　(1)から $\pi k^2 \leqq \dfrac{1}{S_k} \leqq \pi(k+1)^2$ なので，$\displaystyle\pi\sum_{k=1}^{n}k^2 \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \pi\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \pi\sum_{l=2}^{n+1}l^2$

$$\frac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) - \pi\cdot 1^2$$

$$\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \leqq \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} \leqq \frac{\pi}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right) - \frac{\pi}{n^3}$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{\pi}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right) \to \dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right) - \dfrac{\pi}{n^3} \to \dfrac{\pi}{3}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k} = \frac{\pi}{3}$

[解 説]

誘導に従っていけば，方針を迷うこともありません。演習に適切な無理のない問題です。

3

問題のページへ

(1)　$e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}=\dfrac{(a-1)e^x-2a+2}{a-2}=\dfrac{(a-1)(e^x-2)}{a-2}$

$2<a<3$ より，$e^x\geqq 2\ (x\geqq\log 2)$ のとき $e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\geqq 0$，$e^x<2\ (x<\log 2)$ のとき $e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}<0$ である。

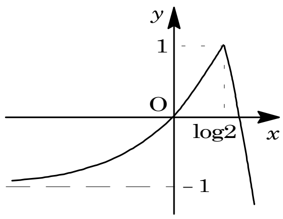
(i)　$x\geqq\log 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\Big(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}-e^x+1+\frac{a-e^x}{a-2}\Big)=\frac{a-e^x}{a-2}$$

(ii)　$x<\log 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\Big(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}+e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\Big)=e^x-1$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ の $x\geqq\log 2$ の部分を，直線 $x=\log 2$ に関して対称移動したグラフを $y=g(x)$ とすると，

$$g(x)=\frac{a-e^{2\log 2-x}}{a-2}=\frac{a-4e^{-x}}{a-2}$$

$0\leqq x\leqq\log 2$ のとき，$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\dfrac{a-4e^{-x}}{a-2}$ とおくと，

$$h'(x)=e^x-\frac{4e^{-x}}{a-2},\quad h''(x)=e^x+\frac{4e^{-x}}{a-2}>0$$

$0\leqq x\leqq\log 2$ のとき，$h'(x)\leqq h'(\log 2)=2-\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{2(a-3)}{a-2}<0$

よって，$h(x)\geqq h(\log 2)=2-1-\dfrac{a-2}{a-2}=0$ から，$f(x)\geqq g(x)$ となる。

すると，求める立体は，$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq\log 2$ の部分を，直線 $x=\log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体に等しいことより，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^{\log 2}2\pi(\log 2-x)(e^x-1)\,dx\\&=2\pi\Big\{\Big[(\log 2-x)(e^x-x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}-(e^x-x)\,dx\Big\}\\&=2\pi\Big\{-\log 2+\Big[e^x-\frac{x^2}{2}\Big]_0^{\log 2}\Big\}=2\pi\Big\{-\log 2+1-\frac{1}{2}(\log 2)^2\Big\}\\&=\pi\Big\{-(\log 2)^2-2\log 2+2\Big\}\end{aligned}$$

[解　説]

回転軸の両側に図形があるので，その位置関係の考察が面倒です。なお，体積はいわゆる円筒分割で計算しています。

4

問題のページへ

(1)　まず, G が箱 B_k から数字 k のカードを引いて, F が k 回すべてヒットを打つ確率 q_k は，$q_k = \frac{1}{k} \cdot p^k$ である。

また, G が箱 B_{k+1} から $k+1$ のカードを引いて F が k 回ヒットを打つか, k のカードを引いて k 回すべてヒットを打つか，いずれかが起こる確率 r_k は,

$$r_k = \frac{1}{k+1} \cdot {}_{k+1}\mathrm{C}_k p^k (1-p) + \frac{1}{k+1} \cdot p^k = \frac{p^k}{k+1}\{(k+1)(1-p)+1\}$$

よって，$(k+1)r_k - kq_k = p^k\{(k+1)(1-p)+1\} - p^k = (k+1)(1-p)p^k$

(2)　(1)と同様にして, G が箱 B_k から数字 $i(1 \leqq j \leqq i \leqq k)$ のカードを引いて，F が j 本ヒットを打つ確率 q_j は,

$$q_j = \frac{1}{k}\sum_{i=j}^{k} {}_i\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{i-j}$$

また, G が箱 B_{k+1} から数字 $i(1 \leqq j \leqq i \leqq k)$ のカードを引いて, F が j 本ヒットを打つ確率 r_j は,

$$r_j = \frac{1}{k+1}\sum_{i=j}^{k+1} {}_i\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{i-j}$$

よって，$(k+1)r_j - kq_j = \displaystyle\sum_{i=j}^{k+1} {}_i\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{i-j} - \sum_{i=j}^{k} {}_i\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{i-j}$

$$= {}_{k+1}\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{k+1-j} \cdots\cdots\cdots ①$$

なお，$j=0$ のときは,

$$(k+1)r_0 - kq_0 = (k+1)\cdot\frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1}(1-p)^i - k\cdot\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(1-p)^i = (1-p)^{k+1}$$

よって，①は $j=0$ のときも成立する。

(3)　箱 B_n を用いた試行で F が j 本ヒットを打つ確率を p_j とするとき,

$$n(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n) = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n \cdots\cdots\cdots (*)$$

が成立することを, n についての数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

箱 B_1 を用いた試行より，$p_0 + p_1 t = (1-p) + pt = \alpha$ となり，成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

箱 B_k を用いた試行について，$k(p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_k t^k) = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k$ の成立を仮定すると, (2)より $p_k = q_k$ なので,

$$k(q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_k t^k) = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$0 \leqq j \leqq k$ のとき，①より，$(k+1)r_j = kq_j + {}_{k+1}\mathrm{C}_j p^j (1-p)^{k+1-j}$

$$(k+1)r_j t^j = kq_j t^j + {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j}$$

$$(k+1)\sum_{j=0}^{k} r_j t^j = k\sum_{j=0}^{k} q_j t^j + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，箱 B_{k+1} を用いた試行について，(2)より $p_k = r_k$ なので，

$$(k+1)(p_0 + p_1 t + \cdots + p_k t^k + p_{k+1} t^{k+1}) = (k+1)(r_0 + r_1 t + \cdots + r_k t^k + r_{k+1} t^{k+1})$$

②③を代入すると，

$$(k+1)(p_0 + p_1 t + \cdots + p_k t^k + p_{k+1} t^{k+1}) = (k+1)\sum_{j=0}^{k} r_j t^j + (k+1) r_{k+1} t^{k+1}$$

$$= k\sum_{j=0}^{k} q_j t^j + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1) r_{k+1} t^{k+1}$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1) r_{k+1} t^{k+1}$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + \sum_{j=0}^{k} {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j} + (k+1)\cdot\frac{1}{k+1} p^{k+1} t^{k+1}$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + \sum_{j=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_j (pt)^j (1-p)^{k+1-j}$$

$$= \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + (pt + 1 - p)^{k+1} = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k + \alpha^{k+1}$$

よって，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n で(＊)は成立するので，

$$p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_n t^n = \frac{1}{n}(\alpha + \alpha^2 + \cdots \alpha^n)$$

(4)　(＊)の両辺を t で微分すると，$\dfrac{d\alpha}{dt} = p$ より，

$$n(p_1 + 2p_2 t + \cdots + np_n t^{n-1}) = (1 + 2\alpha + \cdots + n\alpha^{n-1})p$$

$t = 1$ のとき $\alpha = 1$ なので，$n(p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n) = (1 + 2 + \cdots + n)p$

$$n(p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n) = \frac{1}{2}n(n+1)p$$

すると，箱 B_n を用いた試行において，F が打つヒットの数の期待値 E は,

$$E = p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = \frac{1}{2}(n+1)p$$

[解 説]

(1)を一般化すると(2)となり，(2)を利用して(3)の証明をするというように問題が構成されています。ただ, 30 分程度で完答できるとは思えませんが。

5　問題のページへ

(1)　$X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$のとき，ハミルトン・ケーリーの定理より，

$$X^2-(x+w)X+(xw-yz)E=O\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$X^2-aX+bE=O\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$(-x-w+a)X+(xw-yz-b)E=O\ \cdots\cdots\cdots③$

ここで，$-x-w+a\neq 0$のとき，$X=\dfrac{xw-yz-b}{x+w-a}E=kE$　$\left(k=\dfrac{xw-yz-b}{x+w-a}\right)$とな

り，②に代入すると，$(k^2-ak+b)E=O$，$k^2-ak+b=0\ \cdots\cdots\cdots④$

条件から$a^2-4b<0$なので，④の解kは実数でない。よって，題意に適さない。

すると，③より，$-x-w+a=0$，$xw-yz-b=0$

$$x+w=a\,,\ xw-yz=b\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(2)　⑤より，$x^2+y^2+z^2+w^2-2b=(x-w)^2+2xw+(y+z)^2-2yz-2b$

$$=(x-w)^2+(y+z)^2+2b-2b$$

$$=(x-w)^2+(y+z)^2\geqq 0$$

等号が成り立つのは，$w=x$，$z=-y$のときである。

⑤より，$2x=a$，$x^2+y^2=b$となり，$x=\dfrac{a}{2}$，$y=\pm\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}=\pm c$から，

$$X=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & \pm c \\ \mp c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}\quad（複号同順）$$

(3)　$(X-A)(X-B)=O$に対して，

(i)　$(X-A)^{-1}$が存在するとき　$X-B=O$より，$X=B$

(ii)　$(X-B)^{-1}$が存在するとき　$X-A=O$より，$X=A$

(iii)　$(X-A)^{-1}$，$(X-B)^{-1}$がともに存在しないとき

Sに属する2つの相異なる行列A, Bを，$c>0$から次のようにおくことができる。

$$A=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & c \\ -c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \dfrac{a}{2} & -c \\ c & \dfrac{a}{2} \end{pmatrix}$$

すると，$X-A=\begin{pmatrix} x-\dfrac{a}{2} & y-c \\ z+c & w-\dfrac{a}{2} \end{pmatrix}$，$X-B=\begin{pmatrix} x-\dfrac{a}{2} & y+c \\ z-c & w-\dfrac{a}{2} \end{pmatrix}$となり，

$$\det(X-A)=\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(w-\frac{a}{2}\right)-(y-c)(z+c)=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$\det(X-B)=\left(x-\frac{a}{2}\right)\left(w-\frac{a}{2}\right)-(y+c)(z-c)=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より，$xw-\dfrac{a}{2}(x+w)+\dfrac{a^2}{4}-yz-cy+cz+c^2=0$

⑤より，$b-\dfrac{a^2}{4}-c(y-z)+c^2=0$ ………⑧

⑦より，同様にして，$b-\dfrac{a^2}{4}+c(y-z)+c^2=0$ ………⑨

⑧⑨より $c(y-z)=0$，$c>0$ より $y=z$ となり，⑧に代入すると，$b-\dfrac{a^2}{4}+c^2=0$

$$b-\frac{a^2}{4}+b-\frac{a^2}{4}=0,\ b-\frac{a^2}{4}=0$$

これは $a^2-4b<0$ に反し，不適となる。

(i)(ii)(iii)より，$X=A$ または $X=B$ である。

[解 説]

小問 3 題とも証明であり，この最後の問題も時間を費やします。なお，(2)では⑤の利用を考えて，式変形をしました。