1

解答解説のページへ

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0\leqq \arg z\leqq \pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

(1)　複素数平面上に D を図示せよ。

(2)　a を $a>0$ を満たす実数とする。このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|z|\sin\theta\leqq|z+a|$$

また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

$S_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，$\dfrac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \dfrac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を $2<a<3$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-1+\dfrac{a-e^x}{a-2}-\left|e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$ のグラフの $y\geqq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x=\log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

4

解答解説のページへ

F 君は G 君の投げるボールを確率 $p\,(0<p<1)$ でヒットする。自然数 n に対して，1 から n までの数字を 1 つずつ記入した n 枚のカードが入った箱 B_n がある。G 君が箱 B_n から勝手にカードを 1 枚引いて，カードに書かれている数字の回数だけ F 君にボールを投げる試行を考える。

(1) 箱 B_k を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を q_k，また箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が k 本ヒットを打つ確率を r_k とするとき，$(k+1)r_k-kq_k$ を p，k を用いて表せ。

(2) 箱 B_k を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $q_j\ (0\leqq j\leqq k)$，箱 B_{k+1} を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $r_j\ (0\leqq j\leqq k+1)$ とするとき，$(k+1)r_j-kq_j\ (0\leqq j\leqq k)$ を p, k, j を用いて表せ。

(3) 箱 B_n を用いた試行で F 君が j 本ヒットを打つ確率を $p_j\ (0\leqq j\leqq n)$ とし，$\alpha=pt+1-p$ とすると，変数 t に関して次の等式が成り立つことを示せ。

$$p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots+p_nt^n=\frac{1}{n}(\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n)$$

(4) 箱 B_n を用いた試行において，F 君が打つヒットの数の期待値 E を n，p を用いて表せ。

5

解答解説のページへ

$a,\ b$ を $a^2-4b<0$ を満たす実数とする。

(1)　実数を成分とする 2 次の正方行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が等式

$$(*)\quad X^2-aX+bE=O$$

を満たすならば，$x+w=a$，$xw-yz=b$ が成り立つことを示せ。ただし，O は 2 次の零行列であり，E は 2 次の単位行列である。

(2)　等式$(*)$を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列全体の集合を S とする。S に属する行列 $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$(**)\quad x^2+y^2+z^2+w^2 \geqq 2b$$

また，等号が成り立つときの X を $a,\ c$ を用いて表せ。ただし，$c=\sqrt{b-\dfrac{a^2}{4}}$ とする。

(3)　$A,\ B$ を不等式$(**)$において等号が成り立つ S に属する 2 つの相異なる行列とする。このとき，$(X-A)(X-B)=O$ を満たす S に属する行列 X は A または B であることを示せ。