1

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$に対して，$a\neq 0$より$A\neq O$，$c\neq 0$より$B\neq O$

条件(iii)より$AB=O$で，A^{-1}が存在すると，$A^{-1}AB=A^{-1}O$から$B=O$となり$B\neq O$に反する。よってA^{-1}は存在しないので，$a^2-b^2=0$………①

そこで，ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2-2aA=O$

条件(i)より$A^2=A$なので，$(1-2a)A=O$

$A\neq O$から$a=\dfrac{1}{2}$となり，①より$b=\pm\dfrac{1}{2}$

同様にすると，条件(ii)(iii)より，$c=\dfrac{1}{2}$，$d=\pm\dfrac{1}{2}$

$b>d$より，$b=\dfrac{1}{2}$，$d=-\dfrac{1}{2}$

(2)　(1)より，$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$となるので，

$$BA=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\text{………②}$$

条件より，$(pA+qB)(xA+yB)=2E$

$$pxA^2+pyAB+qxBA+qyB^2=2E$$

条件(i)(ii)(iii)と②より，$pxA+qyB=2E$

$$\frac{1}{2}px\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}qy\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

これより，$px+qy=4$，$px-qy=0$

よって，$px=qy=2$から，$x=\dfrac{2}{p}$，$y=\dfrac{2}{q}$

[解 説]

行列の計算に関する基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=-30\ 9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ ………①

$b_n=3^na_n$ より，$b_{n+1}=3^{n+1}a_{n+1}$ となり，①に代入して，

$$9\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{4}{3^n},\ 3b_{n+1}=b_n+4,\ b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{4}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　②を変形して，$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(b_n-2)$

$$b_n-2=(b_1-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=(3a_1-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=2-92\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=2-276\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$a_n=\frac{b_n}{3^n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n-276\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

(3)　(2)より，$a_{n+1}=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-276\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}$ なので，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-276\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+276\left(\frac{1}{9}\right)^n\\&=-4\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+276\times8\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}=4\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^{n+1}+552)\\&=12\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^n+184)\end{aligned}$$

$n\leqq4$ のとき $-3^n+184>0$ より，$a_{n+1}-a_n>0$，$a_n<a_{n+1}$

$n\geqq5$ のとき $-3^n+184<0$ より，$a_{n+1}-a_n<0$，$a_n>a_{n+1}$

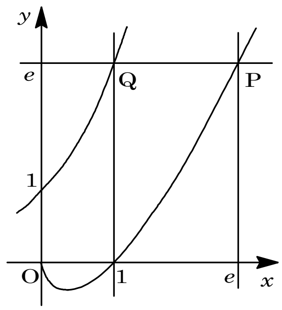
以上より，$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5>a_6>a_7>\cdots\cdots$ となり，$n=5$ のとき a_n は最大である。

[解 説]

前半は誘導つきの漸化式の解法，後半は数列の最大・最小という頻出問題です。

3

問題のページへ



(1)　$x=e$ のとき，$y=e\log e=e$ より，$\mathrm{P}(e,\ e)$

また $y=e$ のとき，$e=e^x$ より $x=1$ となり，$\mathrm{Q}(1,\ e)$

(2)　$f(x)=e^x-x\log x$ とおくと，$f'(x)=e^x-\log x-1$

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{x}$$

$x\geqq 1$ のとき，$f''(x)>0$ より，$f'(x)\geqq f'(1)=e-1>0$

$$f(x)\geqq f(1)=e>0$$

以上より, $x\geqq 1$ のとき，$e^x>x\log x$

(3)　求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_1^e(e^x-x\log x)\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_1^e-\Big[\,\frac{x^2}{2}\log x\,\Big]_1^e+\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=e^e-e-\frac{e^2}{2}+\Big[\,\frac{x^2}{4}\,\Big]_1^e=e^e-\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}$$

[解　説]

本年度の 6 題中，最も基本的な問題です。

4

問題のページへ

(1)　上 2 枚, 下 1 枚, 左 1 枚, 右 3 枚を 1 列に並べる順列は, $\dfrac{7!}{2!3!}=420$ 通りである。

(2)　上に a 回, 下に b 回, 左に c 回, 右に d 回とすると,

$$a+b+c+d=7\cdots\cdots①,\ \ a-b=1\cdots\cdots②,\ \ -c+d=2\cdots\cdots③$$

②より $b=a-1$, ③より $c=d-2$ となり, ①に代入して,

$$a+a-1+d-2+d=7,\ \ a+d=5$$

$b\geqq0,\ c\geqq0$ より $a\geqq1,\ d\geqq2$ となり, $(a,\ d)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(i)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 2,\ 4)$ のとき　$\dfrac{7!}{2!4!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=105\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(ii)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 3)$ のとき　$\dfrac{7!}{2!3!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=420\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(iii)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 0,\ 2)$ のとき　$\dfrac{7!}{3!2!2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=210\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(i)(ii)(iii)より, 求める確率は, $(105+420+210)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=\dfrac{735}{16384}$

(3)　(2)と同様にして, $a+b+c+d=5\cdots\cdots④,\ \ a-b=0\cdots\cdots⑤$

⑤より $b=a$, ④に代入して, $2a+c+d=5$

(i) $a=b=0$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0)$

$$\left(1+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!}+1\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=32\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(ii)　$a=b=1$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$

$$\left(\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{3!}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=160\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(iii)　$a=b=2$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$

$$\left(\frac{5!}{2!2!}+\frac{5!}{2!2!}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=60\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(i)(ii)(iii)より, 求める確率は, $(32+160+60)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^5=\dfrac{63}{256}$

(4)　まず, $(X,\ Y)=(1,\ 1)$ となる確率は $2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$, $(X,\ Y)=(0,\ 0)$ は $4\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$, $(X,\ Y)=(-1,\ -1)$ は $2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ より, $|X-Y|=0$ となる確率は,

$$(2+4+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$|X-Y|$ の値は 0 または 2 なので, $|X-Y|=2$ となる確率は $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ である。

以上より, $|X-Y|$ の期待値は, $0\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{2}=1$

[解 説]

場合分けをして, ていねいに数えていくというセンター風の問題です。

5

問題のページへ

(1)　$a^2x^2+y^2=1$ ……①，$y=ax+2a$ ……②の共有点は，

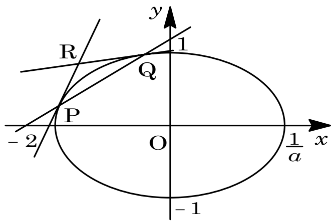
$$a^2x^2+(ax+2a)^2=1,\quad 2a^2x^2+4a^2x+4a^2-1=0$$

異なる 2 点で交わる条件は，$D/4=4a^4-2a^2(4a^2-1)>0$

$a>0$ より，$-2a^2+1>0$，$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　①上の点$(x_0,\ y_0)$における接線の方程式は，

$$a^2x_0x+y_0y=1$$



(3)　$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$とおくと，P，Q における接線は，それぞれ，

$$a^2x_1x+y_1y=1,\quad a^2x_2x+y_2y=1$$

ともに$\mathrm{R}(X,\ Y)$を通るので，

$$a^2Xx_1+Yy_1=1 \text{……③},\quad a^2Xx_2+Yy_2=1 \text{……④}$$

ここで，方程式$a^2Xx+Yy=1$ ……⑤を考えると，これは直線を表し，③より点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$を通り，④より点$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$も通る。すると，⑤は直線 PQ を表す。

⑤を変形すると，$y=-\dfrac{a^2X}{Y}x+\dfrac{1}{Y}$となり，これが②と一致することから，

$$-\frac{a^2X}{Y}=a \text{……⑥},\quad \frac{1}{Y}=2a \text{……⑦}$$

⑦より$a=\dfrac{1}{2Y}$，⑥に代入して，$-\dfrac{1}{2Y}\cdot\dfrac{X}{Y}=1$，$X=-2Y^2$

また，⑦より$Y=\dfrac{1}{2a}$なので，(1)より，$Y>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[解　説]

(2)は結論だけですが，プロセスを書いた方がよいのかどうか迷います。(3)は有名問題の有名な解法を用いて解きました。

6

問題のページへ

(1) $\alpha=i\beta$ のとき，$|z-\alpha|=|t(1+i)-i\beta|=|t+ti-i\beta|$

$|\overline{z}-\beta|=|t(1-i)-\beta|=|t-ti-\beta|=|-i(ti+t-i\beta)|=|ti+t-i\beta|$

また，$\alpha=\overline{\beta}$ のとき，$|z-\alpha|=|t(1+i)-\overline{\beta}|=|t+ti-\overline{\beta}|$

$|\overline{z}-\beta|=|t(1-i)-\beta|=|t-ti-\beta|=|\overline{t+ti-\overline{\beta}}|$

以上より，いずれの場合も $|z-\alpha|=|\overline{z}-\beta|$ なので，$\dfrac{|\overline{z}-\beta|}{|z-\alpha|}=1$，$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$

(2) $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ のとき，$|z-\alpha|=|\overline{z}-\beta|$ より，$|z-\alpha|^2=|\overline{z}-\beta|^2$

$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(\overline{z}-\beta)(z-\overline{\beta})$，$(\overline{\alpha}-\beta)z+(\alpha-\overline{\beta})\overline{z}-(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})=0$

$z=t(1+i)$ を代入してまとめると，

$t\{(\overline{\alpha}-\beta+\alpha-\overline{\beta})+i(\overline{\alpha}-\beta-\alpha+\overline{\beta})\}-(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})=0$ ………①

①がどんな t に対しても成立する条件は,

$(\overline{\alpha}-\beta+\alpha-\overline{\beta})+i(\overline{\alpha}-\beta-\alpha+\overline{\beta})=0$ ……②，$\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=0$ ……③

③より，$|\alpha|^2=|\beta|^2$ なので，$|\alpha|=|\beta|=r$，$0\leqq\theta<2\pi$，$0\leqq\varphi<2\pi$ とおくと，

$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ………④

②より，$(\alpha+\overline{\alpha})-(\beta+\overline{\beta})-i(\alpha-\overline{\alpha})-i(\beta-\overline{\beta})=0$

④を代入すると，$2r\cos\theta-2r\cos\varphi-i\cdot 2ir\sin\theta-i\cdot 2ir\sin\varphi=0$

$\cos\theta+\sin\theta-\cos\varphi+\sin\varphi=0$，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)=0$

$\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}=0$ のとき，$0\leqq\dfrac{\theta+\varphi}{2}<2\pi$ より $\dfrac{\theta+\varphi}{2}=0$，$\pi$ となる。よって，$\theta=-\varphi$ または $\theta=2\pi-\varphi$ より，$\alpha=\overline{\beta}$ である。

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)=0$ のとき，$-\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}<\dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}$ となる。よって，$\theta=\varphi-\dfrac{3}{2}\pi$ または $\theta=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha=i\beta$ である。

(3) 条件より，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}=\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}=\gamma$ なので，

$\overline{z_1}-\beta=\gamma(z_1-\alpha)$ ……⑤，$\overline{z_2}-\beta=\gamma(z_2-\alpha)$ ……⑥

ここで, k を実数として, l 上の任意の点を $z=kz_1+(1-k)z_2$ とおくと,

$$\frac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\frac{k\overline{z_1}+(1-k)\overline{z_2}-\beta}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}=\frac{k\{\beta+\gamma(z_1-\alpha)\}+(1-k)\{\beta+\gamma(z_2-\alpha)\}-\beta}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}$$

$$=\frac{k\gamma(z_1-\alpha)+(1-k)\gamma(z_2-\alpha)}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}=\gamma$$

また，⑤⑥より $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\gamma(z_1-z_2)$ なので，$\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}=\gamma$ となり，$z_1=t_1(1+i)$，$z_2=t_2(1+i)$ とおくと，

$$\gamma=\frac{(t_1-t_2)(1-i)}{(t_1-t_2)(1+i)}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$$

[解 説]

証明問題が 3 題も入っており，ボリュームがかなりあります。特に，(2)は時間がかかりました。