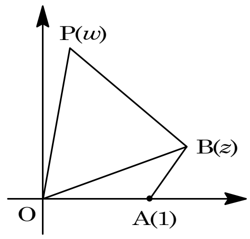
1

問題のページへ



(1)　$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$2\alpha - 1 = \sqrt{3}i$ より，

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = -3,\ \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

(2)　条件より，点 P(w) は点 B(z) を原点まわりに $60°$ 回転した点である。

$\alpha = \cos 60° + i\sin 60°$ より，$w = \alpha z$

(3)　$u = z + \alpha - \alpha z$ とおくと，$u - z = \alpha(1 - z)$

よって，点 Q(u) は点 A(1) を点 B(z) のまわりに $60°$ 回転した点である。すなわち，△ABQ は正三角形となる。

(4)　$v = \dfrac{z + \alpha - \alpha z}{w - 1}$ とおくと，(1)(2)より，

$$v = \frac{(1-\alpha)z + \alpha}{\alpha z - 1} = \frac{-\alpha^2 z + \alpha}{\alpha z - 1} = \frac{-\alpha(\alpha z - 1)}{\alpha z - 1} = -\alpha$$

よって，$v = -\cos 60° - i\sin 60° = \cos 240° + i\sin 240°$ より，$\arg v = 240°$

[解 説]

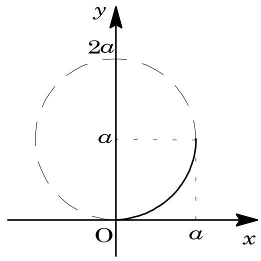
複素数平面上の正三角形が題材となっている頻出基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$r=2a\sin\theta=2a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$なので，曲線 C は，中心 $\left(a,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径 a の円を表す。

また $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，曲線 C は右図の実線部となる。



(2)　条件より，$x=r\cos\theta=2a\sin\theta\cos\theta=a\sin 2\theta$

$y=r\sin\theta=2a\sin^2\theta=a(1-\cos 2\theta)$

求める立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2(1-\cos 2\theta)^2\cdot 2a\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\cos 2\theta\,d\theta$$

ここで，$2\theta=\varphi$ とおくと，

$$V=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}d\varphi$$

$$=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-2\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\,d\varphi$$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

以上より，$V=\pi a^3\left(1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=\pi\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)a^3$

[解 説]

与えられた極方程式はよく知られている原点を通る円を表すものです。なお，(2)は $x,\,y$ の関係で表し，積分した方が簡単でしたが……。

3

問題のページへ

(1)　条件より，$a_1=2$，$(a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n)$ ………(＊)

(＊)に $n=1$ を代入して，$(a_2-a_1)^2=2(a_2+a_1)$

$(a_2-2)^2=2(a_2+2)$，${a_2}^2-6a_2=0$，$a_2(a_2-6)=0$

$a_2>a_1=2$ より，$a_2=6$

次に,(＊)に $n=2$ を代入して，$(a_3-a_2)^2=2(a_3+a_2)$

$(a_3-6)^2=2(a_3+6)$，${a_3}^2-14a_3+24=0$，$(a_3-2)(a_3-12)=0$

$a_3>a_2=6$ より，$a_3=12$

さらに,(＊)に $n=3$ を代入して，$(a_4-a_3)^2=2(a_4+a_3)$

$(a_4-12)^2=2(a_4+12)$，${a_4}^2-26a_4+120=0$，$(a_4-6)(a_4-20)=0$

$a_4>a_3=12$ より，$a_4=20$

(2)　(1)より，$a_n=n(n+1)$ と推測でき，これが正しいことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1\cdot 2=2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=k(k+1)$ と仮定する。

(＊)に $n=k$ を代入して，$\{a_{k+1}-k(k+1)\}^2=2\{a_{k+1}+k(k+1)\}$

${a_{k+1}}^2-(2k^2+2k+2)a_{k+1}+k(k+1)(k-1)(k+2)=0$

$\{a_{k+1}-(k-1)k\}\{a_{k+1}-(k+1)(k+2)\}=0$

$a_{k+1}>a_k=k(k+1)$ より $a_{k+1}=(k+1)(k+2)$ となり，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，$a_n=n(n+1)$

(3)　(2)より，

$$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n+1)}=\frac{(n+2)(n+1)-n(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+n^{-1})}{\sqrt{(1+2n^{-1})(1+n^{-1})}+\sqrt{1+n^{-1}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

[解 説]

初項から第 4 項までを求めることによって一般項を推測し，これを数学的帰納法で証明，さらに極限計算という作成者の意図がはっきりわかる問題です。

4

問題のページへ

(1) 条件より，$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a+2b & 2a+b \\ 4c+2d & 2c+d \end{pmatrix}$

$AB=O$ から，$2a+b=0$ ………①，$2c+d=0$ ………②

①より $b=-2a$，②より $d=-2c$ なので，$abcd=4a^2c^2 \geqq 0$

(2) A^{-1} が存在しないことより，$ad-bc=0$，$ad=bc$ ………③

よって, 3 つの成分が正であるとき，③より残りの 1 つの成分も正である。

(3) $AB=O$ のとき，A^{-1} が存在すれば,

$A^{-1}AB=A^{-1}O$，$B=O$

これは $B\neq O$ に反するので，A^{-1} は存在しない。

[解　説]

各問ともあまりにも簡単に解決するため，かえって不安が残ります。

5

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=x^2-\int_0^x(x-t)f'(t)\,dt=x^2-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt$ ……①

①に $x=0$ を代入すると，$f(0)=0$

また，①の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt-xf'(x)+xf'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt$$

$$=2x-\left[f(t)\right]_0^x=2x-f(x)+f(0)=2x-f(x)\ \cdots\cdots②$$

(2)　②より，$(e^x f(x))'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x f(x)+e^x\{2x-f(x)\}=2xe^x$

(3)　(2)より，$e^x f(x)=\int 2xe^x dx=2xe^x-\int 2e^x dx=2xe^x-2e^x+C$

$$f(x)=2x-2+Ce^{-x}=Ce^{-x}+2x-2$$

$f(0)=0$ より，$C-2=0$ となり，$C=2$

以上より，$f(x)=2e^{-x}+2x-2$

[解 説]

微分型の積分方程式ですが，誘導がていねいについているので，方針に迷うことはありません。

6

問題のページへ

(1)　第 4 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は, ACBB または BCAA である。

(2)　第 2 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は AA または BB より，その確率 F_2 は,

$$F_2 = \frac{1}{2}(1-p) + \frac{1}{2}(1-p) = 1-p$$

次に，第 3 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は ACC または BCC より，その確率 F_3 は,

$$F_3 = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}p^2 = p^2$$

また，第 4 回戦で優勝者が決まる確率 F_4 は, (1)より,

$$F_4 = \frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}p(1-p)$$

(3)　$n \geqq 2$ の場合に，第 $3n$ 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は，$3(n-1)$ 回まで ACBACB……ACB とくり返し最後の 3 回が ACC となる場合，および $3(n-1)$ 回まで BCABCA……BCA とくり返し最後の 3 回が BCC となる場合である。この確率 F_{3n} は,

$$F_{3n} = \left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2 + \left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2 = p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}$$

(4)　(3)の式に $n=1$ をあてはめると $F_3 = p^2$ となるが，これは(2)より $n=1$ に対しても(3)の式が成立していることを示す。

さて，$0 < p < 1$ より $0 < \frac{1}{2}p(1-p) < 1$ なので,

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n} = p^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1} = \frac{p^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)} = \frac{2p^2}{2-p+p^2}$$

[解 説]

問題文が長いのですが，これは詳しすぎるくらいのヒントです。なお，本問は有名な巴戦の問題で，本年は北大でも出ています。