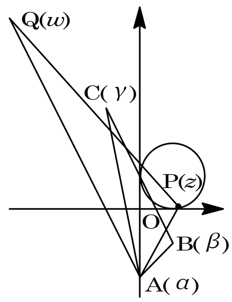
1

問題のページへ

(1)　△APQ と△ABC が同じ向きに相似なので，$\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ より，

$$w=\alpha+\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}(z-\alpha)=-2i+\frac{-1+5i}{1+i}(z+2i)$$
$$=-2i+(2+3i)(z+2i)=(2+3i)z-6+2i$$



(2)　(1)より，$z=\dfrac{w+6-2i}{2+3i}$ ………①

また条件より，$|z-(1+i)|=1$ ………②

①を②に代入して，$\left|\dfrac{w+6-2i}{2+3i}-(1+i)\right|=1$

$$\left|\frac{w+7-7i}{2+3i}\right|=1,\ \frac{|w+7-7i|}{|2+3i|}=1$$

$$|w+7-7i|=|2+3i|,\ |w-(-7+7i)|=\sqrt{13}$$

よって，点 Q(w)は点 $-7+7i$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円を描く。

[解 説]

同じ向きに相似という条件式の説明は省略しました。もし解を丁寧に書くならば，絶対値と偏角を用いて説明をします。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $A = A^2$ と仮定すると，条件(a)から A^{-1} が存在することより，

$$A^{-1}A = A^{-1}A^2,\ \ E = A$$

これは条件(a)の $A \neq E$ に反する。

よって，$A \neq A^2$

(2) $A^2 = E$ とすると，$A \cdot A = E$ から $A = A^{-1}$ となり，条件(c)に反する。

(1)の結果と合わせると，条件(b)より，$A^2 = A^{-1}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ のとき, (2)より，$\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & q \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-p}\begin{pmatrix} q & -p \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p = -\frac{q}{p} \cdots\cdots①,\ \ pq = 1 \cdots\cdots②,\ \ q = \frac{1}{p} \cdots\cdots③,\ \ p + q^2 = 0 \cdots\cdots④$$

④より $p = -q^2$，②に代入して，$q^3 = -1$

q は実数より $q = -1$，$p = -1$

これは①③を満たすので，$p = q = -1$

[解 説]

行列に関する基本問題です。ハミルトン・ケーリーの定理も出番がありません。

3

問題のページへ

(1)　k 番の箱までに入っているカードの枚数の和は，$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

さて, 1 のカードが N 番の箱に入っているとすると,

$$\frac{1}{2}(N-1)N<100\leqq\frac{1}{2}N(N+1),\ (N-1)N<200\leqq N(N+1)$$

すると，$13\cdot14=182$，$14\cdot15=210$ より，$N=14$

また，13 番までの箱に入っているカードの枚数の和は $\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$ より，14 番の箱に入っているカードは，$100-91=9$ 枚である。

(2)　k 番の箱に入っているカードは, 100, 99, 98, 97, …と数えて，$\dfrac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目から $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 枚目までなので，最大数は $\dfrac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目となり,

$$100+\left\{\frac{1}{2}(k-1)k+1-1\right\}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+100$$

(3)　k 番の箱に入っているカードの最小数は $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 枚目で,

$$100+\left\{\frac{1}{2}k(k+1)-1\right\}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k+101$$

すると，$1\leqq k\leqq13$ のとき,

$$S_k=\frac{\left(-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k+101\right)+\left(-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+100\right)}{2}\cdot k=-\frac{1}{2}k^3+\frac{201}{2}k$$

ここで，$f(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{201}{2}x\ (1\leqq x\leqq13)$ とおくと,

$$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+\frac{201}{2}=-\frac{3}{2}(x^2-67)$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{67}$	$\cdots$	13
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

右表より，$f(x)$ は $x=\sqrt{67}$ のとき最大値をとる。

よって，$8<\sqrt{67}<9$ で，$f(8)=548$, $f(9)=540$ となるので，$1\leqq k\leqq13$ のとき，S_k は $k=8$ のとき最大となる。

なお $k=14$ のとき，$S_k=9+8+\cdots+1=45$ となるので，$1\leqq k\leqq14$ において，S_k の最大値は $S_8=548$ である。

[解 説]

長い問題文ですが，要は，初項 100，公差 -1 の等差数列をグループ分けした群数列の問題です。各群の項数に注目するのがポイントです。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ より，$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$$f''(x)=\frac{(2x-1)x^2-(x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

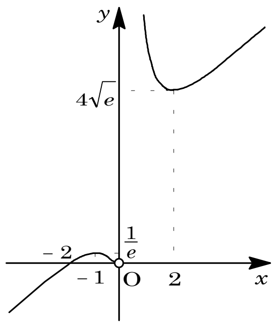
$$=\frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$	$\times$	$+$		$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘		↘	$\times$	↘	$4\sqrt{e}$	↗

右表より，極大値は $\dfrac{1}{e}$ $(x=-1)$，極小値は $4\sqrt{e}$ $(x=2)$ となる。

また，$x=-\dfrac{2}{5}$ のとき $y=\dfrac{8}{5e^2\sqrt{e}}$ より，変曲点は $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{8}{5e^2\sqrt{e}}\right)$ である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ の概形は右図のようになる。



(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{3}{f(x)}-1}{\dfrac{1}{f(x)}+2}=-\frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}=3$ となり，

$$\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}\neq\lim_{x\to-0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在しない。

[解 説]

微分の計算力だけの問題です。特に(3)は構えていたのですが，拍子抜けしました。

5

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left\{\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\right\}+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+C$

(2) $\displaystyle x(\theta)=\int_0^\theta(1+\tan u)\,du$，$\displaystyle y(\theta)=\int_0^\theta(1-\tan u)\,du$ より，

$\displaystyle\left\{x'(\theta)\right\}^2+\left\{y'(\theta)\right\}^2=(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2=2(1+\tan^2\theta)=\frac{2}{\cos^2\theta}$

すると，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における曲線の長さを l とすると, (1)より,

$\displaystyle l=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{2}{\cos^2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}\log(2+\sqrt{3})$

[解 説]

前問に対応して，本問は積分の計算力だけの問題です。(1)の誘導は，必要がないくらいです。

6

問題のページへ

(1)　さいころを 3 回投げて, 1 の目が 1 回, 3 または 5 の目が 2 回出る確率 p_1 は,

$$p_1 = {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

(2)　さいころを n 回投げて, 1 の目が k 回, 3 または 5 の目が $n-k$ 回出る確率 p_k は,

$$p_k = {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

また, n 回投げて, 出た目がすべて奇数の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ で, すべて 3 または 5 の目の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ なので, 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q は,

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　(2)より, $p_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_{k+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1}$ となるので,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k-1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}} = \frac{n-k}{2(k+1)}$$

ここで, $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leqq 1 \iff n-k \leqq 2(k+1) \iff k \geqq \frac{n-2}{3} \iff k \geqq m$

よって, $k > m$ で $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$, $k = m$ のとき $\frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$, $k < m$ で $\frac{p_{k+1}}{p_k} > 1$ から,

$$p_0 < p_1 < p_2 \cdots < p_{m-1} < p_m = p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots > p_{3m+2}$$

以上より, p_k が最大となるのは $k = m$ または $k = m+1$ のときである。

[解　説]

確率の最大値を求める典型問題です。誘導なしが普通です。