1　　問題のページへ

(1)　条件より，$z_1 = wz_3$ ……①，$z_2 = wz_1$ ……②，$z_3 = wz_2$ ……③

①②より $z_2 = w^2 z_3$ なので，$z_1 + z_2 + z_3 = (w + w^2 + 1)z_3$ ………④

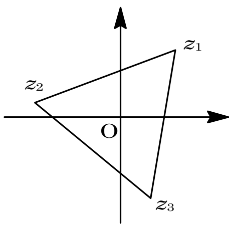
②③より $z_3 = w^2 z_1$ なので，$z_1 + z_2 + z_3 = (1 + w + w^2)z_1$ ………⑤

④⑤より，$(1 + w + w^2)(z_1 - z_3) = 0$

$z_1 \neq z_3$ より，$1 + w + w^2 = 0$ ………⑥

(2)　④⑥より $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ なので，△ABC の重心は原点となる。

また⑥より，$w = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos(\pm 120^\circ) + i\sin(\pm 120^\circ)$



よって，以下，複号同順として，②より z_2 は z_1 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点，③より z_3 は z_2 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点，①より z_1 は z_3 を原点まわりに $\pm 120^\circ$ 回転した点である。

以上より，△ABC は重心が原点の正三角形である。

(3)　②③より，$z = z_1 + 2z_2 + 3z_3 = \dfrac{z_2}{w} + 2z_2 + 3wz_2 = \left(\dfrac{1}{w} + 2 + 3w\right)z_2$

ここで，⑥より $\dfrac{1}{w} = -1 - w$ となるので，

$$z = (-1 - w + 2 + 3w)z_2 = \left(1 + 2\cdot\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)z_2 = \pm\sqrt{3}i \cdot z_2$$

(i)　$w = \dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき　$z = \sqrt{3}i \cdot z_2$ より，z は z_2 を原点まわりに 90° 回転し，原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。

(ii)　$w = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき　$z = -\sqrt{3}i \cdot z_2$ より，z は z_2 を原点まわりに -90° 回転し，原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。

(i)(ii)より，△OBD は，$\angle\mathrm{BOD} = 90^\circ$，$\angle\mathrm{DBO} = 60^\circ$ の直角三角形である。

[解 説]

(1)と(2)の結論は，与えられた①②③から推測できます。その推測の正しいことを，うまく示すのがポイントです。

2

問題のページへ

(1)　条件より，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\dfrac{3(S_n-S_{n-1})}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=\dfrac{3a_n}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}$

$a_n\neq 0$なので，$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=3\ (n\geqq 2)$ ………①

①に$n=2$を代入すると，$\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}=3$，$\sqrt{a_1+a_2}+\sqrt{a_1}=3$

$a_1=1$より，$\sqrt{1+a_2}+1=3$，$a_2=3$

(2)　①より，$\sqrt{S_n}=-\sqrt{S_{n-1}}+3$，$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$

$$\sqrt{S_n}-\frac{3}{2}=-\left(\sqrt{S_{n-1}}-\frac{3}{2}\right)$$

よって，$\sqrt{S_n}-\dfrac{3}{2}=\left(\sqrt{S_1}-\dfrac{3}{2}\right)(-1)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$$\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　(2)より，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\dfrac{3}{2}\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{3-(-1)^{n-2}\right\}$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)(-1)^{n-2}=3(-1)^n\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②に$n=1$をあてはめると，$a_1=-3$となり不成立。

よって，$a_1=1$，$a_n=3(-1)^n\ (n\geqq 2)$

[解　説]

文系の第 1 問の類題です。①のように, 与えられた漸化式を予め変形しておくと, 解を求めやすくなるのは同じですが, (3)の結論は異なった形式となりました。

3

問題のページへ

(1)　$R(\theta)R(\theta')=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta' & -\sin\theta'\\ \sin\theta' & \cos\theta'\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta'-\sin\theta\cos\theta'\\ \sin\theta\cos\theta'+\cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta'+\cos\theta\cos\theta'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta')\\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta')\end{pmatrix}=R(\theta+\theta')$$

(2)　条件より，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$として，$a_1=\cos\theta$，$a_2=\sin\theta$，$b_1=\cos\varphi$，$b_2=\sin\varphi$とおくことができる。

$A^3=B^2$より，$\begin{pmatrix}\cos 3\theta & -\sin 3\theta\\ \sin 3\theta & \cos 3\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix}$

$\cos 3\theta=\cos 2\varphi$……①，$\sin 3\theta=\sin 2\varphi$……②

①②より，$0\leqq 3\theta\leqq\dfrac{3\pi}{2}$，$0\leqq 2\varphi\leqq\pi$なので$3\theta=2\varphi$………③

$AB=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$より，$\begin{pmatrix}\cos(\theta+\varphi) & -\sin(\theta+\varphi)\\ \sin(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi)\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\cos(\theta+\varphi)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$……④，$\sin(\theta+\varphi)=\dfrac{1}{2}$……⑤

④⑤より，$0\leqq\theta+\varphi\leqq\pi$なので$\theta+\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$………⑥

③⑥より，$\theta=\dfrac{1}{3}\pi$，$\varphi=\dfrac{1}{2}\pi$

よって，$A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

[解　説]

(2)の元の設問は「a_1，a_2，b_1，b_2はすべて正の数とする」でしたが，これでは解なしとなります。ここでは，問題文を修正して「a_1，a_2，b_1，b_2はすべて0以上の数とする」として解を作りました。本年度は，阪大をはじめとして，出題ミスが目立ちます。

4　　　　問題のページへ

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f_n(x) = \lim_{x\to+0} \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin nx}{nx}\cdot n = n$

$n = 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f_0(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin 0}{\sin x} = 0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f_n(x) = f_n(0)$ となり，$f_n(x)$ は $x = 0$ で連続である。

(2)

$$I_{n+1} - I_{n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n-1)x}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x}{\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos nx\sin x}{\sin x}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos nx\,dx = \frac{2}{n}\Big[\sin nx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n}\sin\frac{n}{2}\pi \quad (n \geqq 1)$$

(3)　まず，$I_0 = 0$，$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$ となり，(2)から l を自然数として，

(i)　$n = 2l$ のとき　$I_{2l+1} - I_{2l-1} = \frac{1}{l}\sin l\pi = 0$ より，$I_{2l-1} = I_1 = \frac{\pi}{2}$

(ii)　$n = 2l-1$ のとき　$I_{2l} - I_{2l-2} = \frac{2}{2l-1}\sin\frac{2l-1}{2}\pi = \frac{2}{2l-1}(-1)^{l-1}$

$$I_{2l} = I_0 + \sum_{k=1}^{l}(I_{2k} - I_{2k-2}) = \sum_{k=1}^{l}\frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1} = -2\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^k}{2k-1} = -2S_l$$

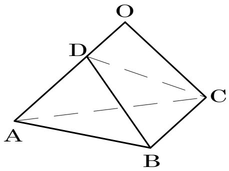
(i)(ii)より，$I_0 = 0$，n が奇数のとき $I_n = \frac{\pi}{2}$，n が 2 以上の偶数のとき $I_n = -2S_{\frac{n}{2}}$

[解 説]

(3)はおもしろい問題です。n を偶奇に分けて考えると，(2)の結論がうまく利用できます。

5

問題のページへ



(1) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}-t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{c}-t\vec{a}$

(2) 条件より，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=6$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cos60°=6$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot6\cos60°=12$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot3\cos60°=9$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2=|\vec{b}-t\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2=9t^2-12t+16$

$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2=|\vec{c}-t\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2=9(t^2-2t+4)$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(\vec{b}-t\vec{a})\cdot(\vec{c}-t\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2=3(3t^2-5t+4)$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}=\dfrac{3t^2-5t+4}{\sqrt{9t^2-12t+16}\sqrt{t^2-2t+4}}$

(3) $\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2}$

$f(t)=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2$とおくと，$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{f(t)}$

$f(t)=9(9t^2-12t+16)(t^2-2t+4)-9(3t^2-5t+4)^2$

$=9(27t^2-40t+48)=9\cdot27\left(t-\dfrac{20}{27}\right)^2+\dfrac{896}{3}$

よって，$t=\dfrac{20}{27}$のとき$f(t)$は最小値$\dfrac{896}{3}$をとり，このとき△BCD の面積は最小となる。その最小値は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{896}{3}}=\dfrac{4\sqrt{42}}{3}$である。

[解 説]

内容的には基本だけですが，計算がたいへんです。特に(3)の計算では，初めは$f(t)$を微分して増減表を作り，最小値をとる t の値を求めたのですが，その後，最小値を求める気にはなりませんでした。それで，また$f(t)$からやり直したのが上の解です。