

1

問題のページへ

$$(1) f(x) = x^3 - 7x, f'(x) = 3x^2 - 7 = 3\left(x - \frac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x + \frac{\sqrt{21}}{3}\right)$$

$y = f(x+1)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので、 $y = f(x-1)$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

x	...	$-\frac{\sqrt{21}}{3}$...	$\frac{\sqrt{21}}{3}$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

ここで、 $f(x+1) = f(x-1)$ とすると、 $(x+1)^3 - 7(x+1) = (x-1)^3 - 7(x-1)$
 $x^2 - 2 = 0, x = \sqrt{2} (x > 0)$

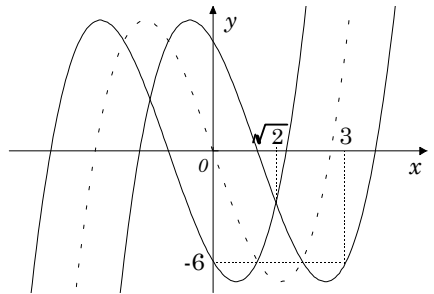
したがって、

$$0 < x < \sqrt{2} \text{ のとき, } g(x) = f(x+1)$$

$$\sqrt{2} < x < 3 \text{ のとき, } g(x) = f(x-1)$$

また、 $0 < \frac{\sqrt{21}}{3} - 1 < \sqrt{2} < \frac{\sqrt{21}}{3} + 1 < 3$ より、

$0 < x < 3$ における $y = g(x)$ が最小となる x は、
 $x = \frac{\sqrt{21}}{3} \pm 1$ となる。



最大となる x は、 $x = 0, \sqrt{2}, 3$ のいずれかである。

ここで、 $g(0) = f(1) = -6, g(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}+1) = (\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7) = -2\sqrt{2},$
 $g(3) = f(2) = -6$ となることより、最大となる x は、 $x = \sqrt{2}$ である。

$$(2) f(x) = f(x+1) \text{ とすると, } x^3 - 7x = (x+1)^3 - 7(x+1) \text{ より,}$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0, x = 1 (x > 0)$$

また、 $f(x) = f(x-1)$ とすると、 $x^3 - 7x = (x-1)^3 - 7(x-1)$ より、

$$-3x^2 + 3x + 6 = 0, x = 2 (x > 0)$$

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分は、 $1 < x < 2$ の範囲だけなので、

$$S_1 = \int_1^{\sqrt{2}} \{f(x+1) - f(x)\} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (3x^2 + 3x - 6) dx = -4\sqrt{2} + \frac{13}{2}$$

$$S_2 = \int_{\sqrt{2}}^2 \{f(x-1) - f(x)\} dx = \int_{\sqrt{2}}^2 (-3x^2 + 3x + 6) dx = -4\sqrt{2} + 7$$

求める面積は、 $S_1 + S_2 = -8\sqrt{2} + \frac{27}{2}$

[解説]

$y = f(x)$ のグラフを丁寧に書いて、 x 軸方向に $+1$ 、および -1 だけ平行移動すれば、結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

2

問題のページへ

$P(-1, a)$, $Q(2, b)$ とする。

$\overrightarrow{PQ} = (3, b-a)$ から、直線PQの法線ベクトルを
 $\vec{n} = (a-b, 3)$ とおくことができる。

直線PQの方程式は、

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線PQが円 $x^2+y^2=1$ に接するので、

$$\frac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1 \text{ から, } |-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$$

両辺2乗して、 $(2a+b)^2=(a-b)^2+9$, $(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

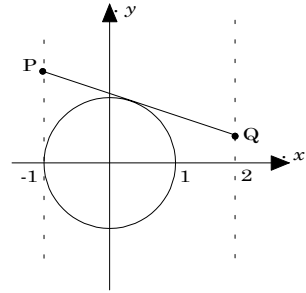
a, b は整数より、 a は3の約数となり、 $a = \pm 1, \pm 3$

$a = 1$ のとき $a+2b=3$ から、 $b=1$ となる。よって、 $P(-1, 1)$, $Q(2, 1)$

$a = -1$ のとき $a+2b=-3$ から、 $b=-1$ となる。よって、 $P(-1, -1)$, $Q(2, -1)$

$a = 3$ のとき $a+2b=1$ から、 $b=-1$ となる。よって、 $P(-1, 3)$, $Q(2, -1)$

$a = -3$ のとき $a+2b=-1$ から、 $b=1$ となる。よって、 $P(-1, -3)$, $Q(2, 1)$



[解 説]

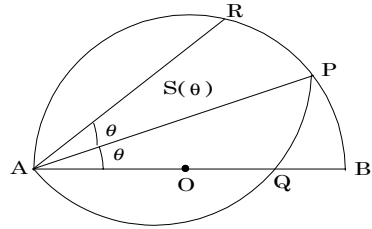
円と直線が接する条件を整理すると、約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単にP, Qの座標が求まってしまいます。

3

問題のページへ

(1) 円の中心を O とすると, $\angle POB = 2\theta$ より,

$$\begin{aligned} T(\theta) &= \text{OAP} + (\text{扇形 BOP}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin(\pi - 2\theta) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot 2\theta \\ &= \frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta \end{aligned}$$

(2) 折り重ねた弓形と直径 AB との交点を Q とおき, Q の AP に関する対称点を R とする。すると, 図形 APQ は図形 APR と合同なので,

$$S(\theta) = (\text{図形 ARP}) = (\text{図形 ARB}) - (\text{図形 APB}) = T(2\theta) - T(\theta)$$

(3) (2)より, $S(\theta) = \left(\frac{1}{2} \sin 4\theta + 2\theta\right) - \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta + \theta\right) = \frac{1}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) + \theta$

$$\begin{aligned} S'(\theta) &= 2 \cos 4\theta - \cos 2\theta + 1 = 4 \cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 \\ &= 4 \left(\cos 2\theta - \frac{1 + \sqrt{17}}{8} \right) \left(\cos 2\theta - \frac{1 - \sqrt{17}}{8} \right) \end{aligned}$$

 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ より, $0 < 2\theta < \frac{\pi}{2}$ から $\cos 2\theta > 0$, よって $\cos 2\theta - \frac{1 - \sqrt{17}}{8} > 0$
 $\cos 2\theta_0 = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$ とおくと,

 $0 < \theta < \theta_0$ で $\cos 2\theta - \frac{1 + \sqrt{17}}{8} > 0$
 $\theta_0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ で $\cos 2\theta - \frac{1 + \sqrt{17}}{8} < 0$
よって, $\theta = \theta_0$ で $S(\theta)$ は最大となる。すなわち, $\cos 2\alpha = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$

θ	0	...	θ_0	...	$\frac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		↗		↘	

[解説]

(2)で「 $T(\theta)$ だけでなく $T(2\theta)$ も用いよ」という意味の設問にはとまどってしまいますが,これが逆に,折り返しを考えるヒントとなっています。この点を発見するのが本問のポイントです。

4

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$ で、AQ と OP の交点を H とおくと、 \overrightarrow{OH} は \vec{a} の \overrightarrow{OP} 方向への正射

影ベクトルとなるので、

$$\overrightarrow{OH} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \right) \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|^2} \overrightarrow{OP}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで、} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \frac{1}{9} |2\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{9} (4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OP} = \vec{a} \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{1}{3} (2|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{5}{6}$$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OH} = \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{8} \overrightarrow{OP} = \frac{15}{16} \cdot \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{5}{16} (2\vec{a} + \vec{b})$$

H は AQ の中点より、 $\frac{\vec{a} + \overrightarrow{OQ}}{2} = \overrightarrow{OH}$ から、

$$\overrightarrow{OQ} = 2\overrightarrow{OH} - \vec{a} = \frac{5}{8} (2\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{5}{8} \vec{b}$$

(2) R は OQ 上の点なので、 $\overrightarrow{OR} = k\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}k\vec{a} + \frac{5}{8}k\vec{b}$

R は AB 上の点なので、 $\frac{1}{4}k + \frac{5}{8}k = 1$, $k = \frac{8}{7}$

$$\text{よって、} \overrightarrow{OR} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{7} \vec{a} + \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{7} \vec{b} = \frac{2}{7} \vec{a} + \frac{5}{7} \vec{b}$$

(3) (2)より、 $AR : RB = 5 : 2$ 、すなわち $AR = \frac{5}{7} AB$

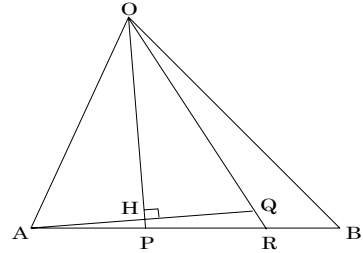
条件より、 $AP = \frac{1}{3} AB$ から、 $PR = \frac{5}{7} AB - \frac{1}{3} AB = \frac{8}{21} AB$

また、(2)で $k = \frac{8}{7}$ より、 $QR = \frac{1}{8} OR$

$$\text{よって、} PQR = \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{8} OAB = \frac{1}{21} OAB$$

$$\text{ここで、} OAB = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{以上より、} PQR = \frac{1}{21} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{84}$$



[解 説]

よく見かける頻出題です。(1)では正射影ベクトルを利用しましたが、普通に $\overrightarrow{OQ} = x\vec{a} + y\vec{b}$ とおいて、 x, y の連立方程式を立て、それを解いても構いません。

5

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } w = \frac{2iz}{z-\alpha} = 2i + \frac{2i\alpha}{z-\alpha}$$

z が $z \neq \alpha$ の任意の値をとるとき, $\alpha \neq 0$ から $\frac{2i\alpha}{z-\alpha}$ は 0 以外の任意の値をとる

る。よって, w は $2i$ 以外の任意の値をとる。すなわち, $w \neq 2i$ となる。

$$(2) |w|=1 \text{ より, } \left| \frac{2iz}{z-\alpha} \right| = 1, \frac{2|z|}{|z-\alpha|} = 1, \frac{|z|}{|z-\alpha|} = \frac{1}{2}$$

これより, 点 z は原点 O と点 α を $1:2$ に内分する点 $\frac{1}{3}\alpha$ と, $1:2$ に外分する点 $-\alpha$ を直径の両端とする円を描く。

$$\text{よって, 円 } C \text{ の中心は } \frac{\frac{1}{3}\alpha + (-\alpha)}{2} = -\frac{1}{3}\alpha, \text{ 半径は } \left| \frac{1}{3}\alpha - \left(-\frac{1}{3}\alpha\right) \right| = \frac{2}{3}|\alpha|$$

また, 円 C の中心が i のとき, $-\frac{1}{3}\alpha = i$ より $\alpha = -3i$

$$(3) (2) \text{ より, } w = \frac{2iz}{z+3i}, wz + 3iw = 2iz$$

$$z \text{ について解いて, } z = \frac{-3iw}{w-2i} \quad (w \neq 2i)$$

z が実数より, $z = \bar{z}$

$$\frac{-3iw}{w-2i} = \frac{3i\bar{w}}{w+2i}, -w(\bar{w}+2i) = \bar{w}(w-2i), w\bar{w} - i\bar{w} + iw = 0$$

$$(w-i)(\bar{w}+i) + i^2 = 0, (w-i)(\overline{w-i}) = 1, |w-i| = 1$$

よって, 点 w は中心が点 i , 半径 1 の円を描く。ただし点 $2i$ は除く。

[解 説]

複素数平面上の変換を題材とした問題ですが, 疑問な点があります。それは(1)の設問で「点 w のとりうる値の範囲」という表現です。これは誤解を招かない妥当な表現なのでしょうか。たぶんこんな意味だろうと判断して, やや雑ですが, 上の解を作りました。