1　　　　解答解説のページへ

定数 a は $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{4}$ を満たすとする。座標平面上の長方形 ABCD は以下の 4 つの条件を満たす。

- 2 点 A, B は放物線 $y = -x^2 + 2a$ 上にある。
- 2 点 C, D は放物線 $y = 2x^2 - a$ 上にある。
- 2 点 A, D の x 座標は等しく，かつ正である。
- 点 A の y 座標は点 D の y 座標より大きい。

点 A の x 座標を t とする。長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積を S とする。

(1)　S を t の式で表せ。

(2)　S の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上に半径がそれぞれa^2，b^2，c^2 $(0<a<b<c)$の 3 つの円 A, B, C および直線 l がある。3 つの円はどれも直線 l に接していて，どの 2 つの円も外接しているとする。

(1) c を a と b を用いて表せ。

(2) 数列 a, b, c が等比数列となるとき，その公比を求めよ。

3

解答解説のページへ

袋に白球と黒球が 5 個ずつ入っている。以下のゲームを n 回続けて行う。

袋から 1 個の球を取り出す。それが白球ならば 1 点獲得する。黒球ならばさいころを投げ，出た目が 3 の倍数ならば 1 点獲得し，そうでなければ得点しない。袋から取り出した球は戻さない。

(1)　$n=2$ の場合，総得点が 2 点となる確率を求めよ。

(2)　$n=3$ の場合，総得点が 2 点以上となる確率を求めよ。

1

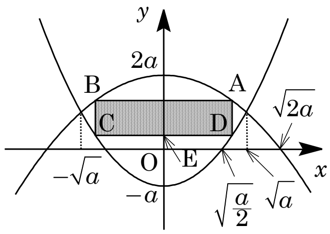
問題のページへ

(1)　$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{4}$のとき，長方形 ABCD について，点 A, B は放物線$y=-x^2+2a$上，点 C, D は放物線$y=2x^2-a$上にあり，条件から$t>0$として，$\mathrm{A}(t,\ -t^2+2a)$，$\mathrm{D}(t,\ 2t^2-a)$とおき，$-t^2+2a>2t^2-a$より，

$$3t^2-3a<0,\ 0<t<\sqrt{a}$$

そして，長方形 ABCD の周および内部を，原点を中心に 1 回転させてできる図形の面積をSとする。

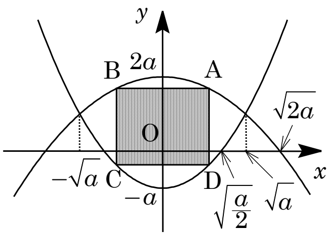
(i)　$\sqrt{\dfrac{a}{2}}\leqq t<\sqrt{a}$のとき



辺 CD とy軸の交点を$\mathrm{E}(0,\ 2t^2-a)$とおくと，

$$\begin{aligned}S&=\pi(\mathrm{OA}^2-\mathrm{OE}^2)\\&=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2-(2t^2-a)^2\}\\&=\pi(-3t^4+t^2+3a^2)\end{aligned}$$

(ii)　$0<t<\sqrt{\dfrac{a}{2}}$のとき



$(-t^2+2a)+(2t^2-a)=t^2+a>0$から，辺 AD の中点の$y$座標は正となり，これより$\mathrm{OA}>\mathrm{OD}$なので，

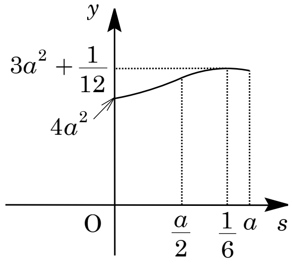
$$\begin{aligned}S&=\pi\mathrm{OA}^2=\pi\{t^2+(-t^2+2a)^2\}\\&=\pi\{t^4-(4a-1)t^2+4a^2\}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$s=t^2\ (0<s<a)$として，$S=\pi f(s)$とおくと，

(i)　$\dfrac{a}{2}\leqq s<a$のとき　$f(s)=-3s^2+s+3a^2=-3\left(s-\dfrac{1}{6}\right)^2+3a^2+\dfrac{1}{12}$

(ii)　$0<s<\dfrac{a}{2}$のとき　$f(s)=s^2-(4a-1)s+4a^2=\left(s-\dfrac{4a-1}{2}\right)^2+\dfrac{8a-1}{4}$

(i)(ii)より，$y=f(s)$のグラフは右図のようになる。



これより，$s=\dfrac{1}{6}$のとき$f(s)$は最大値$3a^2+\dfrac{1}{12}$をとる。

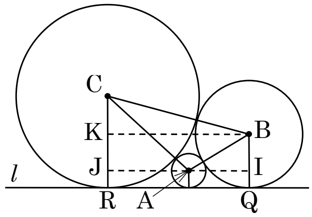
したがって，S の最大値は$\left(3a^2+\dfrac{1}{12}\right)\pi$であり，このとき$t=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$となる。

［解　説］

2 次関数を利用した最大・最小の応用問題です。ただ，内容を把握してこの処理をスタートさせるまでに，チェックすることが多く難儀です。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1) 互いに外接する円 A, B, C は，中心がそれぞれ A, B, C，その半径が a^2，b^2，c^2 $(0<a<b<c)$ である。

また，円 B, C と直線 l の接点をそれぞれ Q, R とおき，A から線分 BQ に垂線 AI，線分 CR に垂線 AJ，また B から線分 CR に垂線 BK を引く。

まず，直角三角形 BCK に対して，$\mathrm{BK}^2=\mathrm{BC}^2-\mathrm{CK}^2$ より，

$$\mathrm{BK}=\sqrt{(b^2+c^2)^2-(c^2-b^2)^2}=\sqrt{4b^2c^2}=2bc$$

同様に，直角三角形 ACJ に対し $\mathrm{AJ}=2ac$，直角三角形 ABI に対し $\mathrm{AI}=2ab$ なので，$\mathrm{AI}+\mathrm{AJ}=\mathrm{BK}$ から $2ab+2ac=2bc$ となり，

$$(b-a)c=ab,\ c=\frac{ab}{b-a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $a, b, c\,(0<a<b<c)$ が等比数列となることより，$b^2=ac\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$b^2=\dfrac{a^2b}{b-a}$ となり，$b(b-a)=a^2$ から，

$$b^2-ab-a^2=0,\ \left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b}{a}-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，等比数列の公比を $r\,(r>1)$ とおくと，$r=\dfrac{b}{a}$ なので，③から，

$$r^2-r-1=0,\ r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

［解 説］

数列の図形への応用について，頻出で有名な構図の問題です。

3

問題のページへ

(1)　題意のゲームを行ったとき，白球で 1 点獲得するのを「白 1」，黒球で 1 点獲得するのを「黒 1」，黒球で点を獲得しないのを「黒 0」と表す。

　さて，2 回ゲームを行い，総得点が 2 点となる確率は，

(i)　白 1→白 1 のとき　$\dfrac{5}{10}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{2}{9}$

(ii)　白 1→黒 1 のとき　$\dfrac{5}{10}\times\left(\dfrac{5}{9}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{5}{54}$

(iii)　黒 1→白 1 のとき　$\left(\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{5}{54}$

(iv)　黒 1→黒 1 のとき　$\left(\dfrac{5}{10}\times\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{4}{9}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{81}$

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{54}\times 2+\dfrac{2}{81}=\dfrac{35}{81}$ となる。

(2)　3 回ゲームを行い，総得点が 0 点となる確率は，黒 0→黒 0→黒 0 のときで，

$$\left(\frac{5}{10}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{81}$$

　次に，3 回ゲームを行い，総得点が 1 点となる確率は，

(i)　白 1→黒 0→黒 0 または黒 0→白 1→黒 0 または黒 0→黒 0→白 1 のとき

$$\frac{5}{10}\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\times\frac{2}{3}\right)\times 3=\frac{5}{27}$$

(ii)　黒 1→黒 0→黒 0 または黒 0→黒 1→黒 0 または黒 0→黒 0→黒 1 のとき

$$\left(\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}\right)\times 3=\frac{1}{27}$$

(i)(ii)より，このときの確率は，$\dfrac{5}{27}+\dfrac{1}{27}=\dfrac{2}{9}$ となる。

　以上より，3 回ゲームを行い，総得点が 2 点以上となる確率は，

$$1-\left(\frac{2}{81}+\frac{2}{9}\right)=1-\frac{20}{81}=\frac{61}{81}$$

［解　説］

　基本的な確率の問題で，最も要求されるのは注意力です。なお，(2)の解答例については，場合分けをまとめて記しています。