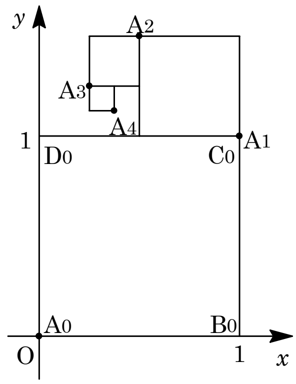
1

問題のページへ



(1) 条件を図示すると，$\overrightarrow{A_0A_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_1A_2}=r(-1,\ 1)$，
$\overrightarrow{A_2A_3}=r^2(-1,\ -1)$，$\overrightarrow{A_3A_4}=r^3(1,\ -1)$となるので，

$$\overrightarrow{A_0A_2}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=(1-r,\ 1+r)$$
$$\overrightarrow{A_0A_3}=\overrightarrow{A_0A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}=(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$$
$$\overrightarrow{A_0A_4}=\overrightarrow{A_0A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}$$
$$=(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$$

よって，$A_2(1-r,\ 1+r)$，$A_3(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$，$A_4(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$である。

(2) $A_{4n}(x_n,\ y_n)$とおくとき, (1)と同様にして,

$$\overrightarrow{OA_{4n+4}}-\overrightarrow{OA_{4n}}=\overrightarrow{A_{4n}A_{4n+1}}+\overrightarrow{A_{4n+1}A_{4n+2}}+\overrightarrow{A_{4n+2}A_{4n+3}}+\overrightarrow{A_{4n+3}A_{4n+4}}$$
$$=(r^4)^n\overrightarrow{A_0A_1}+(r^4)^n\overrightarrow{A_1A_2}+(r^4)^n\overrightarrow{A_2A_3}+(r^4)^n\overrightarrow{A_3A_4}$$
$$=r^{4n}(\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4})=r^{4n}\overrightarrow{A_0A_4}$$

よって，$x_{n+1}-x_n=r^{4n}(1-r-r^2+r^3)$，$y_{n+1}-y_n=r^{4n}(1+r-r^2-r^3)$

(3) $p=1-r-r^2+r^3=(1-r)^2(1+r)$，$q=1+r-r^2-r^3=(1+r)^2(1-r)$とおく。

すると, (2)より, $n\geqq 1$において,

$$x_n=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}pr^{4k}=p\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k},\quad y_n=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}qr^{4k}=q\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}$$

ここで, $0<r<1$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}=\frac{1}{1-r^4}=\frac{1}{(1+r)(1-r)(1+r^2)}$となり,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{p}{1-r^4}=\frac{1-r}{1+r^2},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{q}{1-r^4}=\frac{1+r}{1+r^2}$$

[解 説]

回転の行列を利用して，一般的に解くこともできますが，設問(2)を見て，(1)を延長した解答例を記しています。

2　　問題のページへ

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O，A，M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

(3)　まず, O と M が一致しないとき, (2)より，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ ………③

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ または $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し，③より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(ii)　$\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)(ii)より，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

次に，O と M が一致するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{MI}}\neq\vec{0}$ なので，$\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

よって，いずれの場合も $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ であり，これより $\mathrm{IB}=\mathrm{IC}$ となり，

$$\angle\mathrm{IBC}=\angle\mathrm{ICB},\ 2\angle\mathrm{IBC}=2\angle\mathrm{ICB},\ \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$$

したがって，△ABC は二等辺三角形である。

[解 説]

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。なお，(2)までは文理共通です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=x\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ より，部分積分を用いて，

$$\int_0^1 f(x)dx=\Big[\frac{x^2}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\int_0^1\Big(1-\frac{1}{1+x^2}\Big)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx$$

ここで，$x=\tan\theta\ \Big(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\Big)$とおくと，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$より，

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)=x\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-\log(1+x^2)$ とおくと，

$$h'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-\frac{x}{1+x^2}$$

$$h''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

すると, $x>0$ において，$h''(x)>0$ より，$h'(x)>h'(0)=0$ となり，

$$h(x)>h(0)=0$$

すなわち，$f(x)>g(x)$ である。

(3)　$S_n=\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\Big)-2\log n=\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log n^2\Big\{\Big(\frac{k}{n}\Big)^2+1\Big\}\Big)-2\log n$ とおくと，

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log n^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{k}{n}\Big)^2+1\Big\}-2\log n$$

$$=\frac{1}{n}\cdot 2n\log n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{k}{n}\Big)^2+1\Big\}-2\log n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Big\{\Big(\frac{k}{n}\Big)^2+1\Big\}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\log(x^2+1)dx=\Big[x\log(x^2+1)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$=\log 2-2\int_0^1\Big(1-\frac{1}{x^2+1}\Big)dx=\log 2-2\int_0^1 dx+2\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\log 2+\frac{\pi}{2}-2$$

[解 説]

解き終われば，3 つの設問の関連はあまりないことがわかります。ただ，解き進めているときには, (3)と(2)の関係について，迷いが生じます。

4

問題のページへ

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1=\dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{k}(1-p_n)\,,\ \ p_{n+1}=-\frac{1}{k}p_n+\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k}\left(p_n-\dfrac{1}{k+1}\right)$となり，

$$p_n-\frac{1}{k+1}=\left(p_1-\frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=-\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{k+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}$である。

[解 説]

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで(＊)が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

5

問題のページへ

(1)　実数α，βに対し，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$を満たす2次方程式は,

$$x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$に対して，4次方程式$f(x)=0$は異なる2つの実数解α，βと2つの虚数解をもつことより，kを定数として，

$$x^4+bx^2+cx+2=\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}\right\}(x^2+kx+2a) \cdots\cdots\cdots ②$$

②の両辺の係数を比較すると，$k+a+1=0 \cdots\cdots\cdots ③$

$$2a+k(a+1)+\frac{1}{a}=b \cdots\cdots\cdots ④,\quad 2a(a+1)+\frac{k}{a}=c \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③より，$k=-a-1$となり，④⑤に代入すると，

$$b=2a-(a+1)^2+\frac{1}{a}=-a^2+\frac{1}{a}-1 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

$$c=2a(a+1)-\frac{a+1}{a}=2a^2+2a-\frac{1}{a}-1 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

(2)　①は異なる2つの実数解をもつことより，

$$D=(a+1)^2-\frac{4}{a}=\frac{a^3+2a^2+a-4}{a}=\frac{(a-1)(a^2+3a+4)}{a}>0$$

すると，$a^2+3a+4>0$より，$a<0,\ 1<a \cdots\cdots\cdots ⑧$

また，②③から，$x^2-(a+1)x+2a=0$は2つの虚数解をもつことより，

$$D=(a+1)^2-8a=a^2-6a+1<0$$

よって，$3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2} \cdots\cdots\cdots ⑨$

以上より，⑧⑨をともに満たすaの範囲は，$1<a<3+2\sqrt{2}$

(3)　$g(a)=-a^2+\dfrac{1}{a}-1$とおくと，⑥より，$b=g(a)$となり，$1<a<3+2\sqrt{2}$で，

$$g'(a)=-2a-\frac{1}{a^2}<0$$

よって，$g(a)$は単調に減少し，$g(3+2\sqrt{2})<g(a)<g(1)$

すると，$g(3+2\sqrt{2})=-15-14\sqrt{2}$，$g(1)=-1$から，$b$のとり得る値の範囲は，

$$-15-14\sqrt{2}<b<-1$$

[解 説]

高次方程式についての基本問題です。(1)では，最初，$f(x)$を$x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{a}$で割ろうとしましたが，係数が複雑になりすぎると予測し，方針転換をして恒等式②で計算を進めました。