1

解答解説のページへ

r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を r, n の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n$ を r を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC の外心を O，重心を G，内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k \neq \dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = 0$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

$f(x)=x\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$，$g(x)=\log(1+x^2)$（$x$ は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $x>0$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n\right\}$ の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 解答解説のページへ

$k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0，A_1，A_2，…，A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

a, b, c は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。