1　解答解説のページへ

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし, D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で, x 座標, y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき, D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき, D に含まれる格子点の個数は, $a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。

2

解答解説のページへ

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，$\cdots$，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，$\cdots$，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

△ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形で，t は正の実数とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。直線 AB，AC 上にそれぞれ点 D，E があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ を満たしている。正三角形△ADE の重心を G，線分 BE の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2) t が正の実数全体を動くとき，△CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

$a,\, b$ は実数とする。関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos t\,dt$$

を満たし，かつ $-\pi \leqq x \leqq \pi$ における最大値は 2π である。このとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 dx$ を最小にする $a,\, b$ の値と，その最小値を求めよ。

5

解答解説のページへ

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$ をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 P$\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 Q$\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$ が, 3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$

(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。