

1

問題のページへ

線分 AB 上の点 P を, $0 < t < 1$ として,

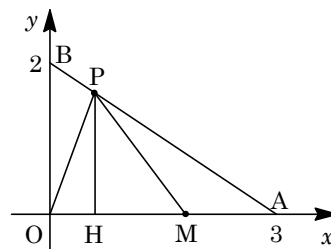
$$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OB} = (3t, 2(1-t))$$

すると, $P(3t, 2(1-t))$, $H(3t, 0)$, $M(\frac{3t+3}{2}, 0)$

となり, これより,

$$OP^2 = (3t)^2 + 4(1-t)^2 = 13t^2 - 8t + 4$$

$$OM^2 = \frac{9}{4}(t+1)^2$$



さて, OPM を O を中心に回転したときにできる円の面積を S とすると,

(i) $13t^2 - 8t + 4 < \frac{9}{4}(t+1)^2$ ($0 < t < \frac{7}{43}$) のとき

このとき, $OP^2 < OM^2$ より,

$$S = \pi OP^2 = \pi(13t^2 - 8t + 4) = \pi \left\{ 13 \left(t - \frac{4}{13} \right)^2 + \frac{36}{13} \right\}$$

(ii) $13t^2 - 8t + 4 > \frac{9}{4}(t+1)^2$ ($\frac{7}{43} < t < 1$) のとき

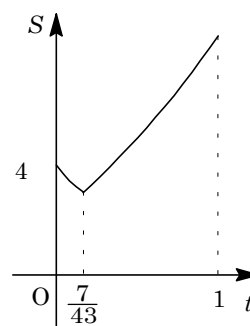
このとき, $OP^2 > OM^2$ より,

$$S = \pi OM^2 = \frac{9}{4}\pi(t+1)^2$$

(i)(ii)より, S の値の変化は右図のようになる。

よって, $t = \frac{7}{43}$ のとき S は最小となり, このとき P の座標

は, $(\frac{21}{43}, \frac{72}{43})$ である。



[解 説]

円の半径は OP または OM となりますが, この大小関係に注目して場合分けをするところがポイントです。

2

問題のページへ

(1) $1 \leq k \leq n$ に対して,

$${}_n C_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-k+2}{2} \cdot \frac{n-k+1}{1}$$

ここで、 $0 < l < k-1$ とすると、 ${}_n C_{k-l} > {}_n C_k$ より、 $\frac{n-l}{k-l} > \frac{n}{k}$ となり、

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdot \frac{n-2}{k-2} \cdots \frac{n-k+2}{2} \cdot \frac{n-k+1}{1} < \frac{n-l}{k-l} \cdot \frac{n-l-1}{k-l-1} \cdots \frac{n-l-k+2}{2} \cdot \frac{n-l-k+1}{1} = \left(\frac{n-l}{k-l}\right)^{k-l}$$

さらに、 $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} < \frac{n^k}{k!} < \frac{n^k}{2^{k-1}}$ から、

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k > {}_n C_k > \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

(2) (1)より、 $\left(\frac{n}{k}\right)^k > {}_n C_k$ なので、二項定理を利用すると、

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k > \sum_{k=1}^n {}_n C_k < \sum_{k=0}^n {}_n C_k = (1+1)^n = 2^n$$

よって、 $\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$

(3) (1)より、 ${}_n C_k > \frac{n^k}{2^{k-1}}$ なので、二項定理を利用すると、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n {}_n C_k \left(\frac{1}{n}\right)^k > 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n^k}{2^{k-1}} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ここで、 $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$$

[解説]

3 題構成の並列型の設問の場合、(1)と(2)が独立で、ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが、本問では、(1)が、独立な(2)と(3)への誘導となっており、変わった構図です。なお、内容は二項定理の応用として、著名なものです。

3

問題のページへ

- (1) まず、9枚のカードから4枚のカードを取り出す ${}_9C_4$ 通りが同様に確からしいとし、事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて、 X が5の倍数になる事象を A とすると、 $P(\bar{A}) = \frac{{}_8C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{9}$ から、

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

- (2) X が3の倍数になる事象を B 、4の倍数になる事象を C とすると、 X が12の倍数になる事象は $B \cap C$ となり、まず $P(\bar{B}) = \frac{{}_6C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{42}$ である。

また、 X が4の倍数にならないのは、奇数のカード4枚を取り出す場合か、2または6のカードと奇数のカード3枚を取り出す場合のいずれかより、

$$P(\bar{C}) = \frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} + \frac{{}_2C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{25}{126}$$

さらに、 X が3の倍数にも4の倍数にもならないのは、1, 2, 5, 7のカードを取り出す場合のみより、 $P(\bar{B} \cap \bar{C}) = \frac{1}{{}_9C_4} = \frac{1}{126}$ となり、

$$\begin{aligned} P(B \cap C) &= 1 - P(\overline{B \cap C}) = 1 - P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(\bar{B}) - P(\bar{C}) + P(\bar{B} \cap \bar{C}) \\ &= 1 - \frac{5}{42} - \frac{25}{126} + \frac{1}{126} = \frac{29}{42} \end{aligned}$$

- (3) 5と7については、平方数 X の約数となる可能性がないので、それ以外の数について、次のようにカードの数の集合を設定する。

$$S = \{1, 4, 9\}, T = \{2, 3, 6, 8\}$$

まず、集合 S から3枚、集合 T から1枚取り出す場合、集合 T のみから4枚取り出す場合は、 X は平方数にはならない。そこで、 X が平方数になるのは、

- (i) 集合 S から1枚、集合 T から3枚取り出す場合

集合 T からは、(2, 3, 6), (3, 6, 8)を取り出す2通りの場合がある。

- (ii) 集合 S から2枚、集合 T から2枚取り出す場合

集合 T からは、(2, 8)を取り出す1通りのみである。

- (i)(ii)より、 X が平方数になる確率は、

$$\frac{{}_3C_1 \times 2}{{}_9C_4} + \frac{{}_3C_2 \times 1}{{}_9C_4} = \frac{1}{14}$$

[解 説]

確率の頻出問題です。(1)と(2)は文系に類題が出ています。(3)は、闇雲に列挙しようとする、数えもれが発生しそうです。

4

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = e^{-ax+b}$ に対し, $x > 0$ において,

$$f(x) \quad g(x) \quad \frac{1}{x} \quad e^{-ax+b} \quad \log \frac{1}{x} \quad -ax+b \quad \log x \quad ax-b$$

ここで, $h(x) = ax - b - \log x$ とおくと, $h'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$

(i) $a > 0$ のとき

$h(x)$ の増減は右表のようになり, $x > 0$ で, つねに $h(x) = 0$ の条件は,

x	0	...	$\frac{1}{a}$...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		↘		↗

$$h\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - b + \log a = 0$$

(ii) $a = 0$ のとき

$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -\infty$ となることから, 不適である。

(i)(ii)より, 求める条件は, $a > 0$ かつ $1 - b + \log a = 0$ である。

(2) (1)より, $h(x) = \log f(x) - \log g(x) = ax - b - \log x$ であり,

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} = a - \frac{1}{x}$$

さて, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが, $x = 1$ で接することより,

$$f(1) = g(1) \dots\dots\dots, \quad f'(1) = g'(1) \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } h(1) = \log f(1) - \log g(1) = a - b = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } h'(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} - \frac{g'(1)}{g(1)} = a - 1 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } a = b = 1 \text{ となり, } g_1(x) = e^{-x+1}$$

また, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが, $x = 2$ で接することより,

$$f(2) = g(2) \dots\dots\dots, \quad f'(2) = g'(2) \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } h(2) = \log f(2) - \log g(2) = 2a - b - \log 2 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } h'(2) = \frac{f'(2)}{f(2)} - \frac{g'(2)}{g(2)} = a - \frac{1}{2} = 0 \dots\dots\dots$$

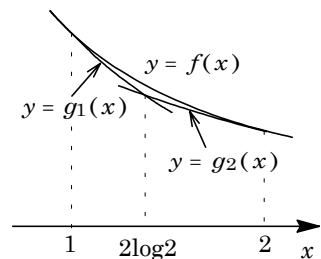
$$\text{より, } a = \frac{1}{2}, \quad b = 1 - \log 2 \text{ となり, } g_2(x) = e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$$

ここで, $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ のグラフの交点は, $e^{-x+1} = e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$ から,

$$-x+1 = -\frac{1}{2}x+1-\log 2, \quad x = 2\log 2$$

$$y = g_1(2\log 2) = e^{-2\log 2+1} = e^{\log \frac{e}{4}} = \frac{e}{4}$$

よって, 交点の座標は $(2\log 2, \frac{e}{4})$ である。



(3) $\log e < \log 4 < \log e^2$ から, $1 < 2\log 2 < 2$ である。

すると, $g_1(x)$, $g_2(x)$ は(1)の条件を満たしており, 3 曲線 $y = g_1(x)$, $y = g_2(x)$, $y = f(x)$ で囲まれる図形の面積 S は,

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^{2\log 2} \left(\frac{1}{x} - e^{-x+1} \right) dx + \int_{2\log 2}^2 \left(\frac{1}{x} - e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2} \right) dx \\
 &= \left[\log x + e^{-x+1} \right]_1^{2\log 2} + \left[\log x + 2e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2} \right]_{2\log 2}^2 \\
 &= \log(2\log 2) + e^{-2\log 2+1} - 1 + \log 2 - \log(2\log 2) + 2e^{-\log 2} - 2e^{-2\log 2+1} \\
 &= e^{\log \frac{e}{4}} - 1 + \log 2 + 2e^{\log \frac{1}{2}} - 2e^{\log \frac{e}{4}} = \frac{e}{4} - 1 + \log 2 + 1 - \frac{e}{2} \\
 &= \log 2 - \frac{e}{4}
 \end{aligned}$$

[解 説]

計算を見通しよくするために, (1)と(2)は, 対数関数のグラフと直線の関係としてとらえています。それでも, 量的にはかなりあります。

5

問題のページへ

$$(1) \quad x = \tan^3 \theta \text{ より, } \frac{dx}{d\theta} = 3 \tan^2 \theta \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} = 3 \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)$$

さて, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ では, $x = 1 \rightarrow 3\sqrt{3}$ のとき $\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{3}$ となるので,

$$\begin{aligned} \int_1^{3\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} \right) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\tan^2 \theta} - \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) \cdot 3 \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)}{\tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta)} d\theta = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= 3 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

(2) (1)と同様に $x = \tan^3 \theta$ とし, $t > 1$ に対して $t = \tan^3 \varphi$ ($\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) とおくと,

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_1^t \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \cdot 3 \tan^2 \theta (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \tan^2 \theta d\theta = 3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) d\theta = 3 \left[\tan \theta - \theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi} \\ &= 3 \tan \varphi - 3\varphi - 3 + \frac{3}{4} \pi = 3t^{\frac{1}{3}} - 3\varphi - 3 + \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

$$\text{すると, } g(t) - at^b = 3t^{\frac{1}{3}} - at^b - 3\varphi - 3 + \frac{3}{4} \pi = t^{\frac{1}{3}} (3 - at^{b-\frac{1}{3}}) - 3\varphi - 3 + \frac{3}{4} \pi$$

ここで, $t \rightarrow \infty$ のとき $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ より, $g(t) - at^b$ が収束する必要条件は,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (3 - at^{b-\frac{1}{3}}) = 0, \quad a \lim_{t \rightarrow \infty} t^{b-\frac{1}{3}} = 3 \dots \dots \dots (*)$$

さて, $b > \frac{1}{3}$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{b-\frac{1}{3}} = \infty$, $0 < b < \frac{1}{3}$ のとき $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{b-\frac{1}{3}} = 0$ となり, ともに(*)

に適さない。ところが, $b = \frac{1}{3}$ のとき, (*)は $a = 3$ で満たされる。

逆に, このとき $g(t) - at^b = -3\varphi - 3 + \frac{3}{4} \pi$ となり, $t \rightarrow \infty$ のとき明らかに収束するので, 求める正の実数 a, b は, $a = 3, b = \frac{1}{3}$ である。

[解 説]

誘導付きの定積分の計算問題です。問題文に $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の指定はありませんが, これは, 自分で設定するということでしょう。