1

解答解説のページへ

座標平面上に点 A(3, 0), B(0, 2) をとる。線分 AB 上に点 P をとり, P から x 軸に下ろした垂線を PH, A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし, また P は A と異なるものとする。O を原点とし△OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき, 通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1) k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2) 不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3) 不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。

3

解答解説のページへ

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X = n^2$ と表されることである。

4

解答解説のページへ

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とし，また実数 $a,\ b$ について $g(x)=e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ においてつねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ。

(2) $y=g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3) (2)で定めた $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$ と $y=f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。

5　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2)　$t>1$ に対して，$g(t)=\displaystyle\int_1^t \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 $a,\ b$ を求めよ。